Powinnaś być ostrożna z takimi terminami jak „wysokie prawdopodobieństwo". Nie chcemy, by ktokolwiek wiedział, ze jesteś mentatem.
– Frank Herbert, *Bóg Imperator Diuny*

Kolokwium z RPiS, 14 grudnia 2022

Zadanie 1 (10 pkt)**.** Mamy 9 skrzynek, ustawionych w kwadrat 3×3. Skrzynka A jest *wieżowa* względem B, jesli jest w tym samym wierszu albo tej samej kolumnie (skrzynka nie jest wieżowa względem samej siebie). W jednej ze skrzynek (losowo wybranej) Małgosia ukryła nagrodę. Zasady gry są następujące: Jaś wskazuje jedną ze skrzynek, po czym Małgosia otwiera jedną ze skrzynek, które sa wieżowe zarówno względem skrzynki zawierającej nagrodę, jak i skrzynki wybranej przez Jasia. Małgosia wybiera skrzynkę, którą otwiera, losowo (jeśli s skrzynek spełnia te warunki, Małgosia może otworzyć każdą z nich z tym samym prawdopodobieństwem $\frac{1}{s}$, niezależnie od tego, gdzie jest nagroda i co wskazał Jaś). Następnie Jaś może otworzyć k skrzynek ($k \in \{1, \ldots, 8\}$ jest parametrem zadania).

1,1	1,2	1,3
2,1	2,2	2,3
3,1	3,2	3,3

Załóżmy, że Jaś wybrał skrzynkę (1,1), a Małgosia otwarła skrzynkę (1,2). Które k skrzynek Jaś powinien otworzyć, by zmaksymalizować prawdopodobieństwo otwarcia skrzynki z nagrodą? Oblicz to prawdopodobienstwo.

Zadanie 2 (10 pkt)**.** Pełne drzewo binarne wysokości n ma $2^n - 1$ wierzchołków. Wstawiamy do niego w losowy sposób wszystkie liczby $1, \ldots, 2^n - 1$ (każda permutacja jest równie prawdopodobna).

a) [5 pkt.] Otrzymane ustawienie spełnia *warunek kopca*, jeśli liczba w każdym wierzchołku v jest większa od każdej liczby w jego poddrzewie. Oblicz prawdopodobieństwo, że ustawienie spełnia warunek kopca.

b) [5 pkt.] Błędem nazywamy taką parę wierzchołków (v, w), że v jest przodkiem w, ale wartość w v jest mniejsza od wartości w w. Niech X będzie zmienną losową określającą liczbę błędów. Podaj funkcję tworzącą prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, $g_X(t)$.

W obu podpunktach wystarczy podać odpowiedź w postaci iloczynu (tzn. iloczynu wyrażeń, z których każde jest w postaci zwartej).

Zadanie 3 (10 pkt)**.** Janek uwielbia gumę do żucia. Każda paczka zawiera kupon ze zdjęciem piłkarza. Jest n różnych kuponów; jeśli Janek zbierze wszystkie kupony, może wziąć udział w loterii, w której może wygrać bilet na finał Pucharu Świata. Janek ma dobrych kolegów, którzy też zbierają kupony, ale wolą je kupować od niego. Załóżmy, że dla $i = 1, \ldots, n$, po każdym zebraniu nowego i-tego kuponu, Janek zbiera pierwsze i kuponów, aż ma dodatkową kopię każdego z nich, zanim będzie mógł zaakceptować nowy $i + 1$ kupon w swojej kolekcji. Ile gum musi średnio kupić Janek, by zebrać wszystkie kupony? Odpowiedź wystarczy podać w formie $\Theta(f(n))$.

Przykładowo: w kolejnych gumach Janek znajduje kupony z następujacymi piłkarzami: Lewandowski, Neymar, Xavi, Lewandowski, Lewandowski, Marta, Xavi. Janek nie może zaakceptować kuponów Neymara ani Xavi, bo jeszcze nie zdobył drugiego kuponu Lewandowskiego. Po zdobyciu drugiego kuponu Lewandowskiego może zaakceptować kolejny nowy kupon (Marta), po czym będzie musiał zdobyć kopie obu kuponów (trzeci Lewandowski, druga Marta) przed zaakceptowaniem trzeciego, itd.

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.