## Kolokwium z RPiS, 12 grudnia 2018

**Zadanie 1** (12 punktów)**.** W worku jest 5 kostek czworościennych $K_0$, $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$. Kostka $K_k$ ma $k$ ścianek czerwonych i $4-k$ ścianek żółtych. Zamykamy oczy, wyciągamy losowo wybraną kostkę, rzucamy nią, i otwieramy oczy. Widzimy 3 ścianki, jedna (stykająca się z podłożem) pozostaje ukryta (każda ścianka jest równie prawdopodobna).

(a, 6 punktów) Wszystkie widoczne ścianki są czerwone. Jakie jest prawdopodobieństwo, że niewidoczna ścianka również jest czerwona?

(b, 6 punktów) Zamykamy oczy, rzucamy tą samą kostką, otwieramy oczy, i oglądamy naszą kostkę. W wyniku powtarzania tej operacji oglądamy kostkę 10 razy, za każdym razem widząc 2 czerwone ścianki i 1 żółtą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucamy kostką $K_2$?

**Zadanie 2** (12 punktów)**.** Profesor Makary napisał program generujący losowo zadania na egzamin. Każdy ze 100 studentów na roku dostaje inne, losowo i niezależnie wygenerowane zadanie; w celu zaliczenia przedmiotu musi to zadanie rozwiązać. Umiejętności poszczególnych studentów są różne: wiadomo, że student numer $i \in \{1, ..., 100\}$ rozwiązuje losowe zadanie z prawdopodobieństwem $i/100$. Oszacuj prawdopodobieństwo, że ponad 90 studentów zaliczy egzamin, z nierówności Markowa (2p), Czebyszewa (4p) i Chernoffa (6p).

**Zadanie 3** (12 punktów)**.** Tworzymy losowy graf o $n$ wierzchołkach w sposób następujący: dla każdej pary różnych wierzchołków $\{i, j\}$ niezależnie dodajemy krawędź $\{i, j\}$ do naszego grafu z prawdopodobieństwem $p$. Trójkątem nazywamy taką trójkę różnych wierzchołków $\{i, j, k\}$, że w naszym grafie są wszystkie trzy krawędzie $\{i, j\}$, $\{j, k\}$, $\{k, i\}$. Niech $X$ oznacza liczbę trójkątów w otrzymanym grafie.

(a, 6 punktów) Policz $EX$.

(b, 6 punktów) Policz $VarX$.

**Przydatne wzory.** $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.**