

Kolokwium z RPiS, 12 grudnia 2018

Zadanie 1 (12 punktów). Dany jest 5-elementowy ciąg wyrazów ze zbioru $0, 1, \dots, 9$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że suma pierwszych 3 wyrazów wynosi 5, a suma ostatnich 3 wyrazów wynosi 8.

Zadanie 2 (12 punktów). Duża Małgosia ma zestaw kamieni domina. Każdy kamień ma dwie strony, po każdej stronie liczbę od 0 do 6; każdy z 28 możliwych kamieni występuje w zestawie raz. Dwa kamienie A i B pasują do siebie, jeśli co najmniej jedna z liczb na A jest równa co najmniej jednej z liczb na B . Mały Jaś ma podobny zestaw, ale dla ułatwienia zostały z niego usunięte wszystkie 7 kamieni zawierających liczbę 6.

Profesor Makary wziął przypadkowy zestaw kamieni należący do jednego z dzieci, i wyciągnął z niego dwa kamienie. Profesor pamięta, że kamienie do siebie pasowały (ale nie pamięta ich dokładnych wartości). Jakie jest prawdopodobieństwo, że zestaw kamieni należał do Małgosi?

Zadanie 3 (12 punktów).

(a, 4 punkty) Generator liczb losowych X generuje liczby losowe z rozkładem Poissona z parametrem λ . Niestety, te liczby są za małe, także postanowiliśmy stworzyć generator większych liczb losowych Y w sposób następujący: piszemy 1, następnie X losowych cyfr 0 i 1 (za każdym razem losujemy niezależnie od wyniku generatora X i poprzednich cyfr), i otrzymany zapis traktujemy jako zapis liczby w systemie dwójkowym. (Przykładowo, jeśli generator X zwróci 5, to generator Y zwróci losową liczbę od 32 do 63.) Podaj wartość oczekiwaną liczby zwracanej przez generator Y .

(b, 4 punkty) Uogólnienie punktu (a): X generuje liczby losowe z rozkładem o funkcji tworzącej $f_X(t)$ określonej dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Wyraż EY przy użyciu funkcji tworzącej $f_X(t)$.

(c, 4 punkty) Podaj wariancję liczby zwracanej przez generator Y (w wersji ogólnej z (b) lub w przypadku szczególnym z (a) – do wyboru).

Przydatne wzory.
$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisaney imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.

