

Kolokwium z RPiS, 6 grudnia 2017

W klasie Jasia i Małgosia jest c chłopców i d dziewczynek. Każde z dzieci losuje dziecko, któremu kupi prezent na Mikołajki; losowanie odbywa się w ten sposób, że każda permutacja jest równie prawdopodobna. W przypadku, gdy dziecko wylosuje samo siebie, prezent kupuje osobiście Święty Mikołaj.

Chłopcy znają innych chłopców lepiej niż dziewczynki, w związku z tym prezent od Świętego Mikołaja, od chłopca dla chłopca lub od dziewczynki dla dziewczynki jest trafiony z prawdopodobieństwem p_1 , podczas gdy prezent od chłopca dla dziewczynki lub od dziewczynki dla chłopca jest trafiony z prawdopodobieństwem p_2 ($p_1 > p_2$); zdarzenia te są niezależne dla każdego dziecka (przy ustalonym wyniku losowania permutacji).

Zadanie 1 (10 punktów).

(a) Czy zdarzenia *Małgosia wylosowała chłopca* i *Małgosia została wylosowana przez chłopca* są niezależne? Czy są niezależne pod warunkiem, że Małgosia nie wylosowała samej siebie? (5p)

(b) Małgosia dostała trafiony prezent, za to prezent od niej nie był trafiony (i w związku z tym nie chce się przyznać, komu dokładnie dała prezent). Jakie jest prawdopodobieństwo, że Małgosia dostała prezent od Jasia? (5p)

Zadanie 2 (10 punktów). Niech X będzie zmienną losową określającą liczbę trafionych prezentów.

(a) Policz wartość oczekiwaną X . (5p)

(b) Policz wariancję X . (5p)

Zadanie 3 (10 punktów). Entropią zmiennej losowej dyskretnej X nazywamy

$$H(X) = - \sum_x P(X = x) \log P(X = x)$$

gdzie suma przebiega po zbiorze $\{x : P(X = x) > 0\}$. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją.

(a) Pokaż, że entropia zmiennej losowej dyskretnej X jest większa lub równa entropii zmiennej losowej $f(X)$. (5p)

(b) Pokaż, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze $\{x : P(X = x) > 0\}$. (5p)

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.

