

## Kolokwium z RPiS, 14 grudnia 2012

**Zadanie 1** (12 punktów). Wybieramy losową osobę  $X$  i okazuje się, że  $X$  ma trójkę rodzeństwa, w tym (co najmniej jedną) starszą siostrę.

- A Jakie jest prawdopodobieństwo, że  $X$  jest dziewczynką? (3pkt)
- B Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugie najstarsze dziecko w tej rodzinie jest dziewczynką? (3pkt)
- C Jakie jest prawdopodobieństwo, że  $X$  jest najmłodszym dzieckiem w tej rodzinie? (3pkt)
- D Niech  $A, B, C$  oznaczać powyższe zdarzenia. Które z par  $(A, B)$ ,  $(A, C)$ ,  $(B, C)$  są niezależne? Podaj przy każdej z nich TAK lub NIE i uzasadnij odpowiedź w każdym przypadku. Brak uzasadnienia będzie traktowany jako brak odpowiedzi. (3pkt)

**Uwaga:** w tym zadaniu przyjmujemy, że przy każdym urodzeniu zdarzenia *rodzi się chłopiec* i *rodzi się dziewczynka* mają takie same prawdopodobieństwa równe  $1/2$  (nie uwzględniamy możliwości urodzenia się bliźniaków itp.), i zdarzenia te są niezależne od tego, jakie dzieci urodziły się wcześniej.

**Zadanie 2** (12 punktów). Pięciu kolegów  $(A, B, C, D, E)$  koresponduje ze sobą. Dla każdego z nich liczbę wysłanych listów można zamodelować rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda$ , przy czym liczby te są niezależne dla poszczególnych kolegów, i dodatkowo przed wysłaniem każdego z listów nadawca wybiera niezależnie odbiorcę wśród pozostałych (i każdy z nich ma wówczas taką samą szansę bycia wylosowanym).

- A Jaka jest wartość oczekiwana liczby listów wysłanych łącznie przez  $A$  i  $B$ ? (3pkt)
- B Jakie jest prawdopodobieństwo, że łącznie zostaną wysłane co najwyżej 2 listy? (3pkt)
- C Jakie jest prawdopodobieństwo, że  $A$  otrzyma od  $B$  co najmniej 2 listy? (3pkt)
- D Jaka jest wariancja liczby listów otrzymanych łącznie przez  $A$  i  $B$ ? (3pkt)

**Zadanie 3** (12 punktów). Rozważmy graf powstający z połączenia  $n$  trójkątów krawędziami bocznymi, na przykład dla  $n = 5$  i  $n = 6$ :



Każdy wierzchołek kolorujemy losowo i niezależnie na jeden z 2 kolorów. Niech  $X$  będzie liczbą trójkątów, których wszystkie 3 wierzchołki są tego samego koloru.

- A Policz  $EX$ . (4pkt)
- B Policz  $\text{Var } X$ . (4pkt)
- C Oszacuj z góry  $P(X \geq n/2)$ . (4pkt)

**UWAGA:** Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisaney imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.

