Zadanie 1 (10 punktów). Tworzymy graf losowy o n wierzchołkach w ten sposób, że dla każdej pary wierzchołków $\{i, j\}$ łączymy je krawędzią z prawdopodobieństwem p (za każdym razem losując niezależnie). Niech X to liczba par wierzchołków $\{u, v\}$ takich, że odległość u od v jest większa niż 2. Przykładowo, dla grafu $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, mamy $X = 5$ (para $\{1, 4\}$ i cztery pary $\{i, 5\}$ dla $i < 5$).

(a) [5 pkt.] Policz EX.

(b) [3 pkt.] Policz $\mathrm{Var}X$.

(c) [2 pkt.] Udowodnij, że $P(X = 0) = O(1/n)$, jeśli $p = d/n$ dla stałej d.

Zadanie 2 (10 punktów). Jaś i Małgosia stoją na planszy złożonej z czterech kwadratów w rzędzie (Jaś, wolny, wolny, Małgosia). W każdej minucie losowo i niezależnie wybieramy jedną z postaci (Jasia lub Małgosię) i kierunek ruchu (lewo lub prawo); jeśli postać stojąca na końcu planszy miałaby wykonać ruch "na zewnątrz" planszy (np. Jaś wykonuje ruch w lewo gdy jest na lewym końcu), to go nie wykonuje. Niech X będzie zmienną losową określającą liczbę minut, po których Jaś i Małgosia po raz pierwszy znajdą się na tym samym kwadracie. Podaj EX.

Zadanie 3 (10 punktów). Niech X i Y będą zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem θ. Policz $P(\max(X, Y) < 1 | (X - Y)^2 \leq 1)$.

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.