

**Zadanie 1** (10 punktów).

Mamy ciąg symboli  $1+1+1+1+\dots+1+1$ , złożony z  $n$  jedynek i  $n - 1$  znaków  $+$ . Każdy z symboli  $+$  niezależnie kasujemy z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$ . Niech  $X$  będzie wartością otrzymanego wyrażenia. Przykładowo, jeśli  $n = 5$  i wykasujemy wszystkie znaki  $+$  oprócz drugiego, to  $X = 11 + 111 = 122$ .

(a) [5 pkt.] Oblicz  $EX$ .

(c) [5 pkt.] Podaj wzór na  $\text{Var}X$ . Wystarczy podać wzór będący sumą wielomianowej liczby składników w postaci zwartej (takiej sumy nie trzeba obliczać).

**Zadanie 2** (10 punktów). W tym zadaniu rozważamy czteroelementowe ciągi nawiasów  $( \ )$ . Zaczynamy od ciągu  $(((($  i chcemy doprowadzić nasz ciąg do poprawnego wyrażenia nawiasowego, czyli  $(( \ ))$  lub  $( \ ) ( \ )$ . W jednym kroku wybieramy losowo indeks  $i = 1, 2, 3, 4$  (każdy indeks z równym prawdopodobieństwem) i jeśli  $i > 1$ ,  $i$ -ty nawias przekreślamy na przeciwny (dla  $i = 1$  nie przekreślamy, bo pierwszy nawias jest już ustawiony dobrze).

(a) [4 pkt.] Ile średnio kroków musimy wykonać, aż otrzymamy poprawne wyrażenie nawiasowe?

(b) [2 pkt.] Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsze otrzymane poprawne wyrażenie nawiasowe to  $(( \ ))$ ?

(c) [4 pkt.] Jakie byłoby prawdopodobieństwo, że pierwsze otrzymane poprawne wyrażenie nawiasowe to  $( \ ) ( \ )$ , gdybyśmy zaczęli od  $(( \ ))$ ?

**Zadanie 3** (10 punktów). Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\theta$ , a  $Y$  będzie *niezależną* zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na  $[0, 1]$ . Ponadto, niech  $Z = X + Y - 1$ . Podaj rozkład  $Z$  pod warunkiem, że  $Z > 0$ .

**UWAGA:** Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.

