Egzamin z RPiS (część II), 10 lutego 2022

Zadanie 1 (10 punktów). W tym zadaniu będziemy rozważać $n \geq 6$ wierzchołkowy, nieskierowany graf losowy G, w którym każda krawędź istnieje z prawdopodobieństwem p niezależnie od pozostałych krawędzi. Niech X oznacza liczby etykietowanych podgrafów indukowanych w tym grafie, izomorficznych ze ścieżką składającą się z 3 wierzchołków. Innymi słowami – oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby ciągów trzyelementowych $(v_1, v_2, v_3) \in V(G)$, że $v_i \neq v_j$ (dla $i \neq j$) oraz $v_1v_2 \in E(G)$, $v_2v_3 \in E(G)$, $v_3v_1 \notin E(G)$. Na na przykład cykl składający się z 4 wierzchołków ma 8 indukowanych podgrafów izomorficznych z taką ścieżką.

(a) [2+2 pkt.] Oblicz EX i Var$X$.

(c) [2+2 pkt.] Oszacuj z góry i z dołu prawdopodobieństwo, że w G jest podgraf indukowany będący ścieżką trzywierzchołkową.

(d) [2 pkt.] Niech A oznacza takie zdarzenie, że w G jest podgraf indukowany będący ścieżką trzywierzchołkową. Znajdź (na podstawie poprzedniego podpunktu) takie (jedno) α, że jednocześnie spełnione są następujące warunki:

- jeśli weźmiemy $p \coloneqq n^{-\beta}$ dla $\beta > \alpha$, to $\lim_{n\to\infty} P(A) = 1$
- jeśli weźmiemy $p \coloneqq n^{-\beta}$ dla $\beta < \alpha$, to $\lim_{n\to\infty} P(A) = 0$.

Zadanie 2 (10 punktów). Małgosia ma trzy zakryte karty, jedną z nich przed sobą, a dwie pozostałe dalej. W każdej turze Małgosia wykonuje jeden z dwóch możliwych ruchów, każdy z prawdopodobieństwem $1/2$:

(a) Ogląda zakrytą stronę karty, którą ma przed sobą.

(b) Tasuje wszystkie trzy karty, po czym losuje jedną z nich i kładzie ją przed sobą, a resztę dalej.

Małgosia kończy zabawę, gdy obejrzy zakrytą stron wszystkich 3 kart.

(a) [5 pkt.] Policz wartość oczekiwaną liczby ruchów, po której Małgosia skończy zabawę.

(b) [5 pkt.] Jakie jest prawdopodobieństwo, że Małgosia zakończy zabawę, ale nigdy nie obejrzy tej samej karty więcej niż raz?

Zadanie 3 (10 punktów). Notoryczny dłużnik, gangster Brylant, zbiera pieniądze, by opłacić wierzyciela – Siwego. Potrzebuje 100 tysięcy rubli. Uzyskuje od życzliwych dawców pewne sumy – od k-tego kolejnego dawcy uzyskuje X_k rubli, gdzie X_k ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 20 000 (i jest niezależne od sum uzyskanych od pozostałych dawców). Zbieranie zostaje zatrzymane w momencie osiagnięcia celu. Znajdź rozkład, wartość oczekiwaną i wariancję liczby życzliwych dawców potrzebnych do uzbierania pełnej kwoty.

UWAGA: Zadania oddajemy przez Moodle. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia w części zadaniowej należy uzasadnić.