

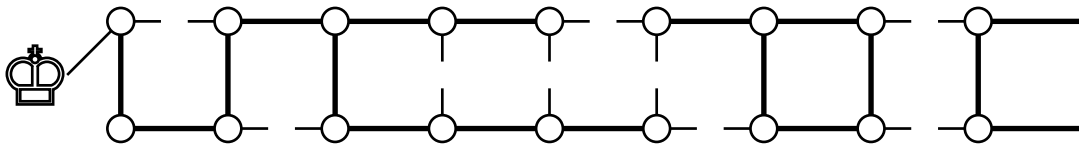
Egzamin z RPiS (część II – 105 minut), 5 lutego 2018

Zadanie 1 (12 punktów). Nauczyciel informatyki pokazał uczniom funkcję generującą liczby z rozkładu jednorodnego na $[0,1]$ i polecił im użyć tej funkcji do symulacji rzutu kostką. Wieloletnie doświadczenie dydaktyczne pokazuje, że uczniowie z prawdopodobieństwem p obliczają wynik ze wzoru $X = \lfloor 1 + 6Z \rfloor$, z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ ze wzoru $Y = \text{round}(1 + 5Z)$, gdzie $Z \sim \text{Unif}(0, 1)$, a round jest funkcją zaokrąglającą do najbliższej liczby całkowitej. Nauczyciel postanowił sprawdzić programy automatycznie poprzez uruchomienie funkcji symulującej rzut kostką n razy (w każdym rzucie wartość Z jest generowana niezależnie). Niech a_k dla $k = 1, \dots, 6$ będzie liczbą razy, kiedy napisany przez ucznia program zwrócił wynik k . Jakie jest prawdopodobieństwo, że uczeń użył wzoru Y ?

Zadanie 2 (12 punktów). W grafie o n wierzchołkach każda krawędź $\{i, j\}$ istnieje niezależnie z prawdopodobieństwem p . Każdy z wierzchołków niezależnie losowo kolorujemy na jeden z k kolorów. Niech X będzie liczbą krawędzi łączących wierzchołki tego samego koloru.

- Policz wartość oczekiwaną X . (4p)
- Policz wariancję X . (4p)
- Oszacuj z góry prawdopodobieństwo $P(X \geq m)$. (4p)

Zadanie 3 (12 punktów). Król Kwadratów wyrusza na patrol po Mieście Kwadratów. Miasto Kwadratów jest nieskończoną drabiną, tzn. grafem (V, E) gdzie $V = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, a wierzchołek (x, y) jest połączony z $(x - 1, y)$ dla $x > 0$, $(x + 1, y)$ i $(x, 1 - y)$. Niestety, z powodu buntu niektóre fragmenty ulic zostały zablokowane. Każda krawędź niezależnie zostaje zablokowana z prawdopodobieństwem p . Król wychodzi ze swojego pałacu w punkcie $(0,0)$. Niech X będzie największą wartością współrzędnej x , którą Król może osiągnąć nie przechodząc przez zablokowane ulice. W sytuacji na rysunku poniżej $X = 5$.



- Policz wartość EX . (6p)
- Policz prawdopodobieństwo, że oba punkty $(X, 0)$ i $(X, 1)$ są osiągalne. (6p)

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.

