

Egzamin z RPiS (część II - 105 minut), 11 marca 2013

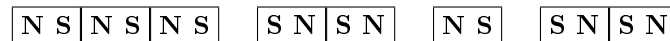
Zadanie 1 (10 punktów). Mamy kwadrat złożony z $n \times n$ krutek. Losujemy prostokąt o wierzchołkach w punktach kratowych i krawędziach równoległych do krutek tak, aby każdy możliwy prostokąt (niezdegenerowany) był równie prawdopodobny.

A Policz wartość oczekiwaną pola otrzymanego prostokąta (w kratkach). (5 punktów)

B Losujemy niezależnie dwa prostokąty powyższą metodą. Niech Y_n będzie zmienną losową oznaczającą pole części wspólnej tych prostokątów (jeśli prostokąty się nie przecinają, to $Y_n = 0$). Policz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{EY_n}{n^2}$. (5 punktów)

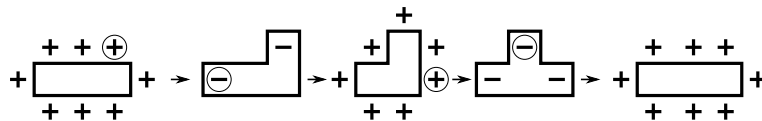
(Wskazówka: dla każdej kratki policz prawdopodobieństwo, że zawiera się ona w tym przecięciu)

Zadanie 2 (10 punktów). Mamy n prostokątnych magnesów. Każdy magnes ma biegun północny i południowy. Układamy je losowo w linii prostej. Jeśli magnesy sąsiadują tym samym biegunem, to się odpychają (i tworzą osobne bloki), w przeciwnym przypadku się przyciągają (i tworzą jeden blok). Niech X będzie liczbą bloków złożonych z pojedynczego magnesu (na rysunku poniżej $X = 1$).



- Policz EX (3 punkty).
- Policz $\text{Var}X$ (5 punktów).
- Oszacuj z góry $P(X \geq \frac{n}{2})$ (2 punkty).

Zadanie 3 (10 punktów). Tworzymy prostszą wersję gry Tetris, w której gracz dostaje do dyspozycji na przemian figury złożone z 3 i 4 klocków (trójki i czwórki). Zaczynamy od trójki złożonej z 3 klocków w linii prostej. Każda czwórka powstaje przez dołączenie do ostatniej trójki nowego kwadracika, a każda trójka powstaje przez usunięcie jednego kwadracika z ostatniej czwórki. W obu przypadkach wymagamy, by nowo otrzymana figura była spójna; wszystkie pozycje dodawanego/usuwanego klocka spełniające ten warunek są równie prawdopodobne. Poniższy rysunek przedstawia przykładowe 5 pierwszych figur, z zaznaczonymi kwadracikami, które mogły być dodane lub usunięte.



A Niech p_n będzie prawdopodobieństwem, że n -ta trójka składa się z 3 klocków ułożonych w linii prostej. Policz $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$. (4 punkty)

(Wskazówka: znajdź rozkład stacjonarny łańcucha Markowa, którego stany odpowiadają poszczególnym kształtom trójek)

B Policz analogiczne granice prawdopodobieństw dla każdego możliwego kształtu czwórki (z dokładnością do obrotu i przesunięcia). (4 punkty)

(Wskazówka: skorzystaj z wyniku punktu A)

C Jeśli w pewnym momencie dostaniemy figurę złożoną z 4 kwadracików ułożonych w linii prostej, to jak długo średnio musimy czekać na następną taką samą figurę? (2 punkty)

(Wskazówka: skorzystaj z wyniku punktu B)

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisaney imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.