

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Eryk Kopczyński

Nr albumu: 189185

Konstrukcja i własności ridgeletów

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Przemysława Wojtaszczyka

Lipiec 2004

Pracę przedkładam do oceny

Data

Podpis autora pracy:

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data

Podpis kierującego pracą:

Streszczenie

Ridgelety ortonormalne $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$ są bazą ortonormalną przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^2)$ mającą potencjalne zastosowania w kompresji obrazów.

Niniejsza praca przybliża konstrukcję ridgeletów ortonormalnych i bada ich własności, takie, jak oszacowanie na wartość $\rho_\lambda(x, y)$ dla punktów (x, y) w pobliżu 0 i ∞ , przedstawia wykresy ρ_λ , oraz konstrukcję rodziny prostszych funkcji η o kształcie i własnościach zbliżonych do ridgeletów.

Słowa kluczowe

falki, transformacja Radona, aproksymacja, ridgelets

Klasyfikacja tematyczna

42-xx. Fourier analysis

42Cxx. Nontrygonometric Fourier analysis

42C40. Wavelets

44-xx. Integral transforms, operational calculus

44A12. Radon transform

Spis treści

1. Wstęp	5
1.1. Oznaczenia i definicje	6
2. Konstrukcja ridgeletów	7
2.1. Baza ortonormalna na \mathbb{R}	7
2.2. Baza ortonormalna na \mathbb{T}	8
2.3. Przestrzeń Radona	9
2.4. Baza ortonormalna na \mathbb{R}^d	10
2.5. Konstrukcja ridgeletów	12
3. Kształt ridgeletów	15
3.1. Przybliżenie	19
3.2. Oszacowanie ρ w pobliżu 0	20
3.3. Oszacowanie ρ daleko od 0	22
Bibliografia	23

Rozdział 1

Wstęp

Falki Meyera bardzo dobrze nadają się do aproksymacji pewnych klas funkcji, co ma zastosowanie między innymi w kompresji obrazów. Każda funkcja f klasy $L^2(\mathbb{R})$ zapisuje się jako $\sum_k a_k \Psi_k$ (Ψ_k — falki Meyera takie, że ich transformata Fouriera jest klasy C^∞). Oznaczmy przez $A_n(f)$ n -ty największy wyraz z ciągu modułów $(|a_k|)_k$. (Na przykład, dla f równej $\frac{1}{2}\Psi_1 + \Psi_4 - \frac{1}{2}\Psi_6$ kolejnymi wyrazami ciągu $A_k(f)$ są $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots$) Jeśli funkcja f jest klasy C^∞ i ma zwarty nośnik, to $A_n = o(n^\epsilon)$ dla każdego $\epsilon > 0$. Oznacza to, że wystarczy mało wyrazów sumy $\sum_k b_k \Psi_k$, żeby uzyskać bardzo dobre przybliżenie funkcji f . To samo zachodzi, jeśli funkcja f o zwartym nośniku jest klasy C^∞ poza skończoną liczbą punktów, w których jest osobliwa. Przykładami funkcji z takimi osobliwościami punktowymi w a są $f(x) = |x - a|^{-1/3}w(x)$ i $f(x) = H(x - a)w(x)$, gdzie $H(x)$ jest funkcją charakterystyczną prawej półprostej $[0, \infty)$, a $w(x)$ jest tzw. „oknem”, czyli funkcją klasy C^∞ o zwartym nośniku.

Na płaszczyźnie sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdyż osobliwości mogą być różnych wymiarów. Dwuwymiarowe falki Meyera wciąż nadają się do aproksymacji funkcji z osobliwościami punktowymi, ale zawodzą dla funkcji z osobliwościami na odcinkach oraz na krzywych.

Funkcją grzbietową (ridge function, planar wave) nazywamy funkcję $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ postaci $f(x) = g(x \cdot u)$, czyli stałą na hiperpłaszczyznach $x \cdot u = t$, dla pewnego kierunku u . Ridgelety zostały wymyślone przez E. Candès’a w jego pracy doktorskiej [Cand98]. Są to funkcje grzbietowe na płaszczyźnie o własnościach zbliżonych w pewnym stopniu do falek, które bardzo dobrze nadają się do aproksymacji funkcji, które mają osobliwości na odcinkach (choć nie są one bazą ortonormalną L^2 — niezerowe funkcje grzbietowe nie mogą być klasy L^2).

Niniejsza praca zajmuje się *ridgeletami ortogonalnymi*, opisanymi przez D. Donoho w pracy [Dono00]. Są to funkcje na płaszczyźnie zbliżone do ridgeletów Candès’a, ale tworzą one bazę ortonormalną przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Istnieje też układ funkcji na płaszczyźnie zwanych *curveletami*, których konstrukcja używa między innymi ridgeletów ortonormalnych. Curvelety są o wiele lepsze od innych znanych układów na płaszczyźnie, jak na przykład falki i wielomiany trygonometryczne Fouriera, jeśli chodzi o aproksymację funkcji klasy C^2 poza brzegiem klasy C^2 , czyli funkcji postaci

$$f(x, y) = \begin{cases} f_0(x, y) & \text{dla } |(x, y)| \leq \rho(\text{Arg}(x + iy)) \\ f_1(x, y) & \text{dla } |(x, y)| > \rho(\text{Arg}(x + iy)) \end{cases}, \quad (1.1)$$

gdzie f_0 i f_1 są funkcjami klasy C^2 o zwartym nośniku na \mathbb{R}^2 , a ρ jest funkcją dodatnią klasy C^1 na okręgu, której pochodna spełnia warunek Lipschitza. (Najprostszy przykładem takiej funkcji f jest funkcja charakterystyczna koła, dla której ρ jest funkcją stałą.) Dokładniej, błąd, który uzyskujemy, jeśli bierzemy m największych wyrazów przybliżenia jest

rzędu $O(m^{-2}(\log m)^3)$, podczas gdy dla innych znanych układów jest on rzędu $O(m^{-1})$ lub gorszego. Ma to potencjalne zastosowanie w kompresji obrazów.

Dużo informacji o ridgeletach, curveletach i innych układach, ich związkach z sieciami neuronowymi, analizą harmoniczną i teorią aproksymacji można znaleźć w pracy [Cand01].

W niniejszej pracy przedstawiono konstrukcję Donoho (w hipotetycznym uogólnieniu na wyższe wymiary) oraz pewnie wyniki dotyczące kształtu ridgeletów ρ — m. in. ich wykresy (wyliczone numerycznie), oszacowanie na wartość $\rho(x, y)$ dla (x, y) w pobliżu 0, oraz rodzinę funkcji η o kształcie i własnościach zbliżonych do ridgeletów, ale łatwiejszych do liczenia.

1.1. Oznaczenia i definicje

W niniejszej pracy często będziemy używać następujących operatorów na przestrzeniach funkcyjnych $L_p(\mathbb{R}^d)$:

- *Operator translacji* T^y , zadany wzorem $T^y f(x) = f(x - y)$.
- *Operator odbicia* Q , $Qf(x) = f(-x)$.
- *Operator dylatacji* J , $Jf(x) = 2^{d/p} f(2x)$.
- *Transformata Fouriera*

$$\mathcal{F}_d(f)(\omega) = (2\pi)^{-d/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \cdot x} f(x) dx; \quad (1.2)$$

funkcja $\mathcal{F}(f)$ bywa też oznaczana \widehat{f} .

- *Odwrotna transformata Fouriera* $\mathcal{F}_d^{-1} = Q\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_dQ$.

W przypadku $p = 2$, wszystkie te operatory są unitarne. (Transformata Fouriera jest określona dla $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$, ale daje się rozszerzyć do operatora unitarnego na L_2 .)

Symbol S^n oznacza sferę n -wymiarową, czyli $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Punkt antypodyczny do $x \in S^n$ oznaczamy przez $-x$. Podobnie jak dla \mathbb{R}^d , na przestrzeniach funkcyjnych $L_p(S^n)$ mamy operator $Qf(x) = f(-x)$.

Najbardziej dla nas interesujący jest przypadek $d = 2$. Płaszczyznę \mathbb{R}^2 interpretujemy jako płaszczyznę zespoloną \mathbb{C} . Okrąg S^1 interpretujemy jako $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Z tej interpretacji wynika oznaczenie e^{it} i struktura mnożenia na okręgu.

Jeśli V i W są przestrzeniami L_2 ($V = L_2(A, \mu_A)$, $W = L_2(B, \mu_B)$), to *iloczynem tensorowym* przestrzeni V i W , oznaczanym $V \otimes W$, nazywamy przestrzeń $L_2(A \times B, \mu_A \otimes \mu_B)$. Jeśli $v \in V$, $w \in W$, to przez $v \otimes w \in V \otimes W$ oznaczamy funkcję zadaną wzorem $(v \otimes w)(a, b) = v(a)w(b)$. Nie wszystkie elementy $V \otimes W$ są tej postaci, ale jest ona domknięciem przestrzeni liniowej przez nie rozpinanej. Jeśli $(v_i)_{i \in I}$ i $(w_j)_{j \in J}$ są odpowiednio bazami ortonormalnymi V i W , to $(v_i \otimes w_j)_{i \in I, j \in J}$ jest bazą ortonormalną $V \otimes W$. Jeśli $L : V \rightarrow V$ jest operatorem liniowym, to $L \otimes I$ jest operatorem działającym dla każdego ustalonego b jak operator L , czyli $(L \otimes I)v(a, b) = (Lv(\cdot, b))(a)$. Analogicznie definiuje się operator $I \otimes M$ dla $M : W \rightarrow W$, oraz $L \otimes M = (L \otimes I)(I \otimes M)$.

Przez \mathbb{Z}_k oznaczamy grupę cykliczną rzędu k , czyli zbiór liczb $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ z dodawaniem modulo k .

Rozdział 2

Konstrukcja ridgeletów

Do konstrukcji ortonormalnych ridgeletów na \mathbb{R}^d potrzebujemy dwóch baz ortonormalnych: $(t_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ na $L_2(\mathbb{R})$, oraz $(s_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}$ na $L_2(S^{d-1})$ (na sferze). W konstrukcji zaproponowanej przez D. Donoho stosujemy bazy ortonormalne oparte na falkach Meyera. Bazy te są opisane w następnych dwóch podrozdziałach. Potrzebna również będzie transformata Radona.

Transformata Radona oraz konstrukcja prowadząca od baz ortonormalnych na $L_2(\mathbb{R})$ i $L_2(S^{d-1})$ do ridgeletów została w niniejszym rozdziale przedstawiona w sposób ogólny (dla dowolnego d), ale będziemy jej używać tylko dla $d = 2$.

2.1. Baza ortonormalna na \mathbb{R}

Definicja 2.1 Niech $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$. Niech V_0 będzie podprzestrzenią domkniętą $L_2(\mathbb{R})$ rozpinaną przez funkcje $T^m\Phi$ dla $m \in \mathbb{Z}$ (przesuwamy funkcję Φ o odcinki będące liczbami całkowitymi). Niech $V_j = J^j V_0$ dla $j \in \mathbb{Z}$. Funkcję Φ nazywamy **funkcją skalującą**, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. $(T^m\Phi)_{m \in \mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną V_0 ,
2. $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$
3. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
4. $L_2(\mathbb{R})$ jest domknięciem $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$.

Przykładem funkcji skalującej jest Φ_H , funkcja charakterystyczna odcinka $[0, 1]$. Przestrzeń V_j to wówczas przestrzeń funkcji stałych na odcinkach $[m/2^j, (m+1)/2^j]$.

Niech $\Psi \in V_1$ będzie taką funkcją, że funkcje $T^m\Phi$ i $T^m\Psi$ dla $m \in \mathbb{Z}$ stanowią razem bazę ortonormalną V_1 (słowo *razem* oznacza, że suma zbiorów $\{T^m\Phi\}$ i $\{T^m\Psi\}$ stanowi bazę ortonormalną, a nie każdy z nich). ($T_m\Phi$ jest bazą ortonormalną V_0 ; wiemy, że $V_0 \subset V_1$.) Dla Φ_H funkcją spełniającą ten warunek jest Ψ_H , różnica funkcji charakterystycznej $[0, 1/2]$ i funkcji charakterystycznej $[1/2, 1]$.

Z definicji funkcji skalującej i definicji Ψ wynika, że funkcje $J^j T^m\Phi$, $J^j T^m\Psi$ dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$ stanowią razem bazę ortonormalną V_{j+1} . Jeśli do tego dorzucimy funkcje $J^{j+1} T^m\Psi$, to otrzymamy bazę ortonormalną V_{j+2} (wzięliśmy inną bazę V_{j+1} zamiast $J^{j+1} T^m\Phi$). Kontynuując powyższą operację i wiedząc, że domknięciem sumy wszystkich przestrzeni V_j jest całe $L_2(\mathbb{R})$, otrzymujemy następujący fakt:

Fakt 2.2 Niech $j_0 \in \mathbb{Z}$. Funkcje $J^{j_0} T^m\Phi$ dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$, oraz $J^j T^m\Psi$ dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$ oraz $j \in \mathbb{Z}, j \geq j_0$, stanowią razem bazę ortonormalną przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$.

Jeśli skorzystamy również z założenia, że przecięcie przestrzeni V_j jest puste, otrzymamy:

Fakt 2.3 Funkcje $J^j T^m \Psi$ dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$ oraz $j \in \mathbb{Z}$ stanowią bazę ortonormalną przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$.

Definicja 2.4 Funkcję Ψ spełniającą tezę faktu 2.3 nazywamy **falką**. (Funkcję Ψ_H nazywamy **falką Haara**.) Funkcję Ψ powiązaną w powyższy sposób z funkcją skalującą Φ nazywamy **falką powiązaną z Φ** . Funkcje $J^j T^m \Psi$ oznaczamy przez $\Psi_{j,m}$ (tak samo dla Φ).

Będzie nam jeszcze potrzebna falka Meyera:

Definicja 2.5 Falką Meyera nazywamy falkę Ψ spełniającą następujące własności:

1. $\text{supp} \widehat{\Psi} \subset [-8/3\pi, -2/3\pi] \cup [2/3\pi, 8/3\pi]$,
2. Ψ jest rzeczywistą funkcją klasy C^∞ ,
3. $\Psi(-1-x) = \Psi(x)$.

Jeśli Ψ jest falką Meyera, to funkcja $T^{1/2}\Psi$ jest rzeczywistą funkcją parzystą, zatem jej transformata Fouriera $\gamma(\omega) = e^{-i\omega/2}\widehat{\Psi}(\omega)$ jest również rzeczywistą funkcją parzystą. Najprostsza falka Meyera jest Ψ_A zadana przez funkcję γ_A , która jest funkcją charakterystyczną zbioru $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$, pomnożoną przez $(2\pi)^{-1/2}$. Odpowiadającą jej funkcją skalującą jest Φ_A taka, że $\widehat{\Phi}_A$ jest funkcją charakterystyczną odcinka $[-\pi, \pi]$ (znów pomnożoną przez $(2\pi)^{-1/2}$). Wadą jej jest to, że funkcja $\widehat{\Psi}_A$ nie jest ciągła, przez co m. in. Ψ_A nie należy do klasy L_1 .

Jeśli zamiast γ_A użyjemy funkcji γ takiej, że odpowiednia Ψ również będzie falką, ale γ będzie klasy C^∞ , to unikniemy tego problemu. Przykładowe konstrukcje takich falek można znaleźć w [Wojt00]; falkę Meyera, dla której transformatą Fouriera jej funkcji skalującej jest funkcja θ z Zadania 4.2 z [Wojt00], będziemy oznaczać przez Ψ_C .

Z definicji $\text{supp}(\gamma)$ jest zawarty w $[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}] \cup [+ \frac{2\pi}{3}, + \frac{8\pi}{3}]$. Funkcja γ musi spełniać $|\gamma(\omega)| \leq (2\pi)^{-1/2}$.

2.2. Baza ortonormalna na \mathbb{T}

Korzystając ze skonstruowanego w fakcie 2.2 układu ortonormalnego na $L_2(\mathbb{R})$, możemy skonstruować układ ortonormalny falek okresowych na $L_2[0, 1]$. Niech $\mathcal{O} : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1[0, 1]$ będzie operatorem zadany wzorem $\mathcal{O}f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m)$. Korzystając z faktu 2.2 oraz z ortogonalności $\Phi_{0,m}$ i $\Phi_{0,n}$ dla $m \neq n$, łatwo jest udowodnić następujący fakt:

Fakt 2.6 Niech $j_0 \in \mathbb{Z}, j_0 \geq 0$. Niech Ψ i Φ będzie falką i odpowiadającą jej funkcją skalującą i obie należą do $L^1(\mathbb{R})$. Funkcje $\mathcal{O}\Phi_{j_0,m}$ dla $m \in \mathbb{Z}_{2j}$ oraz $\mathcal{O}\Psi_{j,m}$ dla $j \in \mathbb{Z}, j \geq j_0, m \in \mathbb{Z}_{2j}$ należą wówczas do $L_2[0, 1]$ i stanowią razem jej bazę ortonormalną.

Układ ortonormalny na $L_2[0, 1]$ możemy przenieść na $L_2(\mathbb{T})$ przy użyciu izometrii $\mathcal{A} : L_2[0, 1] \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ zadanej wzorem

$$\mathcal{A}f(e^{2\pi it}) = (2\pi)^{-1/2}f(t). \quad (2.1)$$

2.3. Przestrzeń Radona

Do konstrukcji ridgeletów potrzebujemy jeszcze kilku elementów.

Definicja 2.7 Niech $X_{t,u}$ będzie płaszczyzną prostopadłą do wektora u i odległą od 0 o t : $X_{t,u} = \{x : x \cdot u = t\}$. **Transformatą Radona** funkcji $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ jest funkcja $Rf : \mathbb{R} \times S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$, zadana wzorem

$$Rf(t, u) = \int_{X_{t,u}} f(x) dx. \quad (2.2)$$

$Rf(t, u)$ jest całką z f po hiperpowierzchni $x \cdot u = t$.

Transformata Radona jest operatorem nieograniczonym, w związku z czym jest określona nie dla wszystkich $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Jest ona określona tylko dla tych f , które są całkowalne dla prawie wszystkich hiperpowierzchni $X_{t,u}$ oraz Rf zadana powyższym wzorem należy do $L^2(\mathbb{R} \otimes S^{d-1})$.

Transformatę Radona wygodnie się zapisuje przy użyciu delty Diraca δ :

$$Rf(t, u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \delta(x \cdot u - t) dx. \quad (2.3)$$

Nie każda funkcja z $L_2(\mathbb{R} \times S^{d-1})$ może być transformatą Radona jakiejś funkcji f . Jest bowiem spełniony warunek $Rf(-t, -u) = Rf(t, u)$.

Definicja 2.8 Przestrzeń Radona \mathcal{R} nazywamy podprzestrzeń funkcji z $L_2(\mathbb{R} \times S^{d-1})$ spełniających warunek $f(-t, -u) = f(t, u)$.

Łatwo sprawdzić, że operator $\mathcal{P} : L_2(\mathbb{R} \times S^{d-1}) \rightarrow \mathcal{R}$ zadany wzorem $\mathcal{P} = (I + Q \otimes Q)/2$ jest rzutem (ortogonalnym) na \mathcal{R} .

Istnieje prosta izometria C z przestrzeni Radona w $L_2(\mathbb{R}^d)$. Każdy punkt przestrzeni \mathbb{R}^d (oprócz 0) można wyrazić jako iloczyn punktu $u \in S^{d-1}$ i $\omega \in \mathbb{R}$ (przypomina to układ biegunowy). Izometria ta jest zadana wzorem

$$Ch(\omega u) = \sqrt{2} |\omega|^{-(d-1)/2} h(\omega, u). \quad (2.4)$$

Wartość h w punkcie (ω, u) jest reprezentowana przez wartość Ch w punkcie ωu . Wartość $|\omega|^{-(d-1)/2}$ jest pierwiastkiem z jacobianu, a $\sqrt{2}$ wynika stąd, że każdy punkt liczymy dwa razy, jako ωu i $(-\omega)(-u)$ (z definicji przestrzeni Radona wynika, że wartość $Ch(\omega u)$ nie zależy od tego, którą reprezentację wybierzemy).

Fakt 2.9 Niech $R^* : \mathcal{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ będzie operatorem zadany wzorem

$$R^*h(x) = \int_{S^{d-1}} h(x \cdot u, u) du. \quad (2.5)$$

Podobnie jak dla transformaty Radona, jest on określony tylko dla tych funkcji h , dla których prawa strona jest określona dla prawie wszystkich x oraz funkcja R^*h zadana powyższym wzorem jest klasy L^2 . Jeśli $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ i $h \in \mathcal{R}$ są funkcjami, dla których określone są odpowiednio operatory R i R^* , to mamy $\langle Rf, h \rangle = \langle f, R^*h \rangle$.

Dowód.

$$\langle Rf, h \rangle = \int_{S^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} Rf(t, u)h(t, u)dtdu = \quad (2.6)$$

$$= \int_{S^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\delta(x \cdot u - t)h(t, u)dxdtdu = \quad (2.7)$$

$$= \int_{S^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)h(x \cdot u, u)dxdu = \quad (2.8)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{S^{d-1}} h(x \cdot u, u)dudx = \quad (2.9)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)R^*h(x)dx = \langle f, R^*h \rangle. \quad (2.10)$$

■

2.4. Baza ortonormalna na \mathbb{R}^d

Mając bazy ortonormalne $(t_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ na $L_2(\mathbb{R})$ i $(s_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}$ na $L_2(S^{d-1})$ oraz przestrzeń Radona \mathcal{R} , możemy przystąpić do ogólnej konstrukcji bazy ortonormalnej na \mathbb{R}^d , której szczególnym przypadkiem są ridgelety. Nie każda baza ortonormalna (t_τ) i (s_σ) jest dobra. Układ (t_τ) musi spełniać następujący

Warunek 2.10 Wyrazy (t_τ) można połączyć w pary $(\tau, q(\tau))$, $\tau \neq q(\tau)$, takie, że $Q(t_\tau) = \pm t_{q(\tau)}$ (znak \pm nie ma znaczenia; Q to operator odbicia $Qf(x) = f(-x)$). Taki sam warunek musi spełniać układ (s_σ) .

Przez \mathcal{S}' oznaczamy taki podzbiór \mathcal{S} , do którego należy dokładnie jeden element każdej pary $(\sigma, q(\sigma))$.

Na przestrzeni $L_2(\mathbb{R} \times S^{d-1})$ mamy tensorową bazę ortonormalną $(t_\tau \otimes s_\sigma)_{(\tau, \sigma) \in \mathcal{T} \times \mathcal{S}}$. Oznaczmy

$$W_{\tau, \sigma} = \sqrt{2}\mathcal{P}(t_\tau \otimes s_\sigma). \quad (2.11)$$

Korzystając z warunku 2.10 i wzoru $\mathcal{P} = (I + Q \otimes Q)/2$, mamy

$$W_{\tau, \sigma} = (\sqrt{2}/2)(t_\tau \otimes s_\sigma \pm t_{q(\tau)} \otimes s_{q(\sigma)}). \quad (2.12)$$

Łatwo pokazać, że $(W_{\tau, \sigma})_{\tau \in \mathcal{T}, \sigma \in \mathcal{S}'}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni \mathcal{R} (wyrzuciliśmy tutaj duplikaty, biorąc \mathcal{S}' zamiast \mathcal{S}).

Niech $\mathcal{I} : \mathcal{R} \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ będzie operatorem zadany wzorem (indeksy przy \mathcal{F} oznaczają tutaj wymiar przestrzeni, na której działa transformata Fouriera)

$$\mathcal{I} = \mathcal{F}_d^{-1}C(\mathcal{F}_1 \otimes I). \quad (2.13)$$

Oznaczmy $\rho_{\tau, \sigma} = \mathcal{I}W_{\tau, \sigma}$. Operator \mathcal{I} jest izometrią (bo transformata Fouriera i C są izometriami), więc $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{T} \times \mathcal{S}'}$ jest bazą ortonormalną w przestrzeni \mathbb{R}^d . Transformata Fouriera $\rho_{\tau, \sigma}$ zapisuje się wzorem

$$\widehat{\rho}_{\tau, \sigma}(\omega u) = |\omega|^{-(d-1)/2}(\widehat{t}_\tau(\omega)s_\sigma(u) + \widehat{t}_\tau(-\omega)s_\sigma(-u)). \quad (2.14)$$

Interesujące jest zapisanie izometrii \mathcal{I} w inny sposób.

Definicja 2.11 Operatorem ułamkowego różniczkowania Riesz $\Delta : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ nazywamy operator $\Delta = \mathcal{F}^{-1}Y^+\mathcal{F}$, gdzie $Y^+g(\omega) = |\omega|^{1/2}g(\omega)$. Operator ten jest nieograniczony i określony tylko dla tych f , dla których $Y^+\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$.

Z własności transformaty Fouriera wiemy, że gdybyśmy we wzorze na Y^+f mnożyli przez ω zamiast przez $|\omega|^{1/2}$, byłby to zwykły operator różniczkowania (z dokładnością do mnożenia przez i). Biorąc pierwiastek z ω , otrzymujemy „ułamkowe” różniczkowanie.

Fakt 2.12 Niech $f \in \mathcal{R}$, $g = (\mathcal{F}_1 \otimes I)f$, $h = Cg$, $j = \mathcal{F}_d^{-1}h$ (czyli $j = \mathcal{I}f$). Jeśli funkcje h i $f(\cdot, u)$ są całkwalne oraz operatory R^* i Δ^{d-1} są określone dla odpowiednich funkcji, to dla pewnego współczynnika α_d

$$j = \mathcal{I}f = \alpha_d R^*(\Delta^{d-1} \otimes I)f. \quad (2.15)$$

Dowód. Oznaczmy $\Pi = ((2\pi)^{-1/2})$.

$$j(x) = \Pi^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\nu \cdot x} h(\nu) d\nu = \quad (2.16)$$

$$= 2^{-1} \Pi^d \int_{S^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u \cdot x} |\omega|^{d-1} h(\omega u) d\omega du = \quad (2.17)$$

$$= 2^{-1/2} \Pi^d \int_{S^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u \cdot x} |\omega|^{d-1} |\omega|^{-(d-1)/2} g(\omega, u) d\omega du = \quad (2.18)$$

$$= 2^{-1/2} \Pi^{d+1} \int_{S^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u \cdot x} |\omega|^{(d-1)/2} \int e^{-i\omega t} f(t, u) dt d\omega du = \quad (2.19)$$

$$= 2^{-1/2} \Pi^{d-1} \int_{S^{d-1}} (\Delta^{d-1} \otimes I)f(u \cdot x, u) du = \quad (2.20)$$

$$= 2^{-1/2} \Pi^{d-1} (R^*(\Delta^{d-1} \otimes I)f)(x). \quad (2.21)$$

■

Fakt 2.13 Załóżmy, że założenia faktu 2.12 są spełnione dla $f = W_{\tau, \sigma}$ i operator Δ^{d-1} jest określony dla t_τ ; oznaczmy $t_\tau^+ = \Delta^{d-1}t_\tau$. Mamy wówczas

$$\rho_{\tau, \sigma}(x) = \sqrt{2}\alpha_d \int_{S^{d-1}} t_\tau^+(x \cdot u) s_\sigma(u) du. \quad (2.22)$$

Dowód. Łatwo sprawdzić, że $R^*(Q \otimes Q) = R^*$ i, że operator Q jest przemienny z Δ . Ze wzoru 2.15 otrzymujemy

$$\rho_{\tau, \sigma}(x) = \alpha_d R^*(\Delta^{d-1} \otimes I)(\sqrt{2}/2)(I + Q \otimes Q)(t_\tau \otimes s_\sigma) = \quad (2.23)$$

$$= (\sqrt{2}/2)\alpha_d R^*(I + Q \otimes Q)(\Delta^{d-1} \otimes I)(t_\tau \otimes s_\sigma) = \quad (2.24)$$

$$= \sqrt{2}\alpha_d R^*(t_\tau^+ \otimes s_\sigma) = \quad (2.25)$$

$$= \sqrt{2}\alpha_d \int_{S^{d-1}} t_\tau^+(x \cdot u) s_\sigma(u) du. \quad (2.26)$$

■

2.5. Konstrukcja ridgeletów

Baza ortonormalnych ridgeletów powstaje przez zastosowanie konstrukcji z podrozdziału 2.4 (w wymiarze $d = 2$) do bazy falkowej na prostej (same falki Meyera, bez funkcji skalujących) skonstruowanej w 2.1 oraz bazy falkowej na okręgu, skonstruowanej w 2.2.

Jako bazę ortonormalną na prostej przyjmujemy falki Meyera, czyli (Ψ jest oczywiście falką Meyera)

$$\mathcal{T} = \{(j, k) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}, \quad t_{j,k} = \Psi_{j,k}. \quad (2.27)$$

Baza ortonormalna na okręgu jest bazą wynikającą z faktu 2.6, przeniesioną na \mathbb{T} przy użyciu operatora \mathcal{A} (2.1). Ustalamy liczbę $i_0 \in \mathbb{Z}, i_0 \geq 1$. Przyjmujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(0, i_0, l) : l \in 2^{i_0}\} \cup \{(1, i, l) : i \geq i_0, i \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}_{2^i}\}, \\ s_{0,i_0,l} &= \mathcal{A}\mathcal{O}\Phi_{i_0,l}, \quad s_{1,i,l} = \mathcal{A}\mathcal{O}\Psi_{i,l}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Za Ψ bierzemy falkę Meyera, a za Φ odpowiadającą jej funkcję skalującą.

Bazy te spełniają warunek 2.10: $Qt_{j,k} = -t_{j,-1-k}$ (z ostatniego punktu definicji falki Meyera), $Qs_{\epsilon,i,l} = s_{\epsilon,i,l+2^{i-1}}$. Stąd wynika kojarzenie w pary q . Za \mathcal{S}' można wziąć $\{(\epsilon, i, l) \in \mathcal{S} : l < 2^{i-1}\}$. Możemy więc zastosować konstrukcję 2.4.

Przedstawiona powyżej konstrukcja została trochę uproszczona w stosunku do konstrukcji Donoho. Jeśli bazą przestrzeni Hilberta V jest $(v_\tau)_\tau$, i dla każdego τ mamy jakąś bazę $(w_\sigma^\tau)_\sigma$ przestrzeni Hilberta W (tej samej dla każdego τ), to $(v_\tau \otimes w_\sigma^\tau)_{\tau,\sigma}$ jest bazą przestrzeni $V \otimes W$. Możemy więc, tworząc bazę dla iloczynu tensorowego przestrzeni $L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{T})$, zamiast brać ustaloną bazę przestrzeni $L_2(\mathbb{T})$, dobierać ją oddzielnie dla każdego elementu bazy $L_2(\mathbb{R})$.

W naszym przypadku baza ortonormalna (s_σ) na $L_2(\mathbb{T})$ jest sparamateryzowana wartością $i_0 \geq 0$; Donoho przyjmuje $i_0 = \min(i'_0, k(\tau))$. Nie zaburza to warunku 2.10.

Definicja 2.14 Ridgeletami nazywamy bazę ortonormalną złożoną z funkcji $\rho_{\epsilon,i,l,j,k}$ zadanych wzorem (2.14) dla układów $(t_{j,k})$ i $(s_{\epsilon,i,l})$ zdefiniowanych wzorami (2.27) i (2.28).

Dla falek Meyera operator Δ jest określony (ze względu na zwarty nośnik ich transformaty Fouriera); pozostałe założenia faktu 2.13 również łatwo sprawdzić, zatem zachodzi wzór (2.22). Wynika z niego, że $\rho_{\tau,\sigma}$ jest „średnią” funkcji grzbietowych (*ridge function*) $t_\tau^+(x \cdot u)$ (współczynniki tej „średniej” nie muszą być dodatnie). Jeśli wartości s_σ są małe poza okolicami pewnego kierunku u (w przypadku falek okresowych oznacza to, że współczynnik skalowania ma dużą wartość), to funkcja $\rho_{\tau,\sigma}$ jest dobrym przybliżeniem funkcji grzbietowej. Uzasadnia to nazwę *ridgelety ortonormalne* dla skonstruowanych przez nas obiektów.

Fakt 2.15 Jeśli $j \in L^2(\mathbb{R}^d)$, transformata Radona jest określona dla j i operator $\Delta^{d-1} \otimes I$ jest określony dla Rj , to $\mathcal{I}^{-1}j = \alpha_d(\Delta^{d-1} \otimes I)Rj$.

Dowód. Fakt ten wynika stąd, że \mathcal{I} jako izometria jest operatorem unitarnym i stąd, że Y^+ jest operatorem symetrycznym. Dla każdego $f \in \mathcal{R}$ spełniającego założenia faktu 2.12 (funkcje takie są gęste w \mathcal{R} , bo zawierają przestrzeń liniową rozpinaną przez $W_{\tau,\sigma}$) mamy:

$$\langle f, \mathcal{I}^{-1}j \rangle = \langle If, j \rangle = \langle \alpha_d R^*(\Delta^{d-1} \otimes I)f, j \rangle = \quad (2.29)$$

$$= \langle ((\mathcal{F}(Y^+)^{d-1} \mathcal{F}^{-1}) \otimes I)f, \alpha_d Rj \rangle = \quad (2.30)$$

$$= \langle f, \alpha_d (\mathcal{F}^{-1}(Y^+)^{d-1} \mathcal{F} \otimes I)Rj \rangle = \quad (2.31)$$

$$= \left\langle f, \alpha_d(\mathcal{F}^{-1}Q(Y^+)^{d-1}Q\mathcal{F} \otimes I)Rj \right\rangle = \quad (2.32)$$

$$= \left\langle f, \alpha_d(\mathcal{F}(Y^+)^{d-1}\mathcal{F}^{-1} \otimes I)Rj \right\rangle = \quad (2.33)$$

$$= \left\langle f, \alpha_d(\Delta^{d-1} \otimes I)Rj \right\rangle. \quad (2.34)$$

Zatem $\mathcal{I}^{-1}j = \alpha_d(\Delta^{d-1} \otimes I)Rj$. ■

Fakt 2.15 jest powodem, dla którego ridgelety tak dobrze nadają się do aproksymacji funkcji z osobliwościami na odcinkach. Jak sobie dość łatwo wyobrazić, transformata Radona przekształca osobliwości na odcinkach na osobliwości punktowe w przestrzeni Radona. (Niestety, słabo nadają się do aproksymacji funkcji z osobliwościami punktowymi, gdyż osobliwości punktowe stają się osobliwościami na krzywych.) Pełny dowód tych własności można znaleźć w pracy [Dono00].

Brak ridgeletów dla wymiarów $d > 2$ wynika z braku dobrych ortonormalnych baz falowych na S^{d-1} dla $d > 2$. Warto zauważyć, że w wymiarze $d > 2$ mogą nas interesować osobliwości dowolnych wymiarów od 0 do $d-1$. W pracy [Dono99] została przedstawiona konstrukcja krat sztywnych, które mogłyby dobrze aproksymować takie osobliwości (konstrukcja używa m.in. rozmaitości Grassmana). (*Kratą sztywną* nazywamy układ funkcji (f_n) w L^2 taki, że dla każdego $h \in L^2$ mamy $h = C \cdot \sum \langle h, f_n \rangle f_n$ dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$; przykładem kraty sztywnej nie będącej bazą jest układ funkcji powstający po połączeniu dwóch różnych baz ortonormalnych.)

Rozdział 3

Kształt ridgeletów

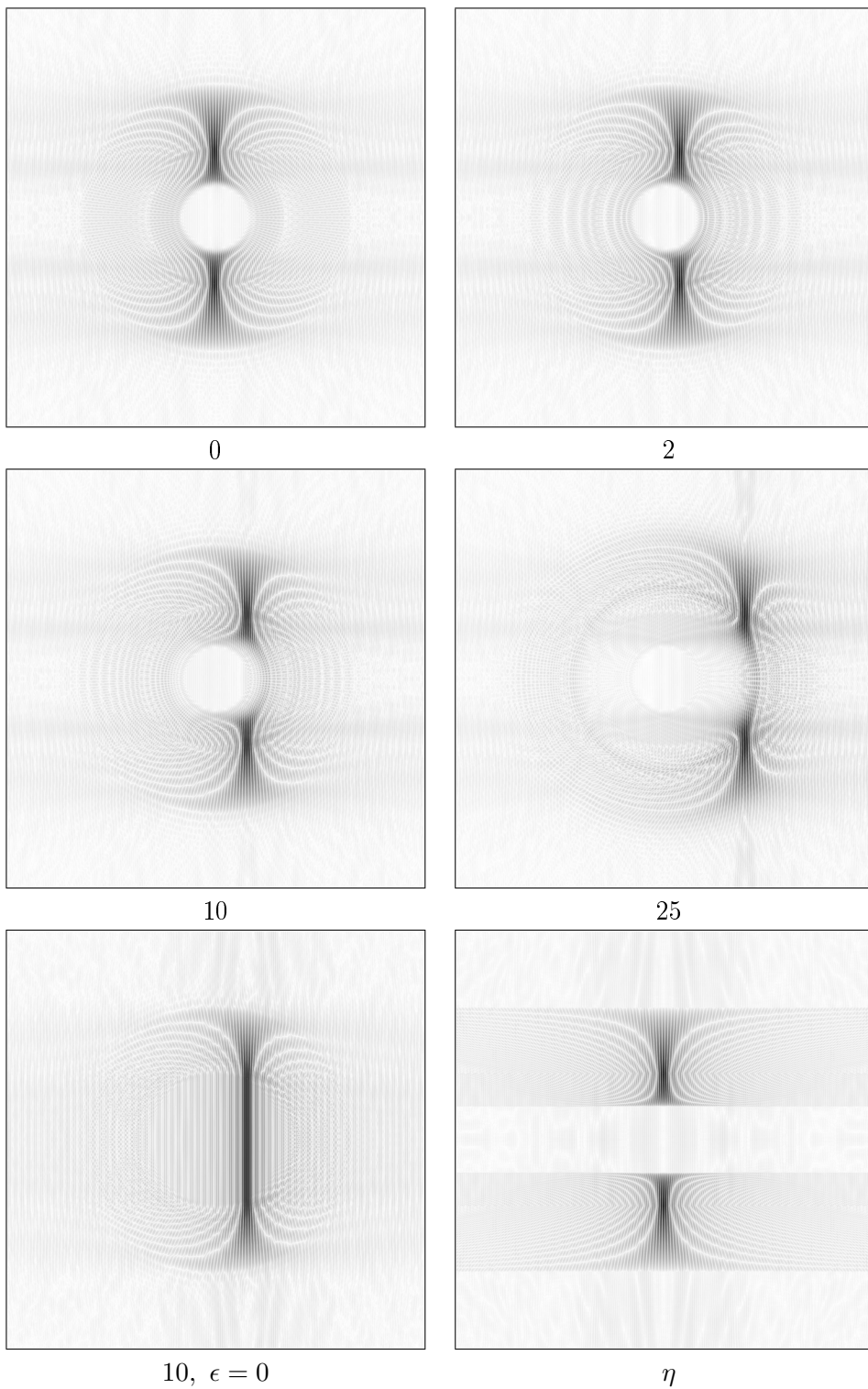
W tym rozdziale zajmujemy się własnościami ridgeletów (opartych na falkach Meyera, na płaszczyźnie). Baza ortogonalna ridgeletów jest indeksowana pięcioma liczbami:

- k — skala falki na prostej. Jak łatwo zauważyć, zmiana tego parametru oznacza po prostu skalowanie ridgeletu, zatem dla wygody przyjmujemy, że ma on wartość 0 (fakty łatwo będzie przenieść na dowolne k).
- l — jak bardzo falka Meyera jest oddalona od punktu 0. Środek układu współrzędnych ma duże znaczenie w konstrukcji ridgeletów, zatem parametr ten dość mocno wpływa na kształt.
- ϵ — określa, z którą częścią bazy ortonormalnej $L_2(\mathbb{T})$ mamy do czynienia: z funkcjami skalującymi na poziomie i_0 (0), czy z falkami na poziomie $i \geq i_0$ (1).
- i — skala falki lub funkcji skalującej na okręgu. Ma wpływ na kształt ridgeletu (zasięg kątowy), podobnie jak l .
- j — obrót falki lub funkcji skalującej na okręgu. Zmiana tego parametru powoduje obrócenie ridgeletu, zatem, podobnie jak dla k , będziemy przyjmowali, że ma on ustaloną wartość. Funkcja s_σ jest symetryczna; aby środkiem symetrii było 0, przyjmujemy $j = 1/2$.

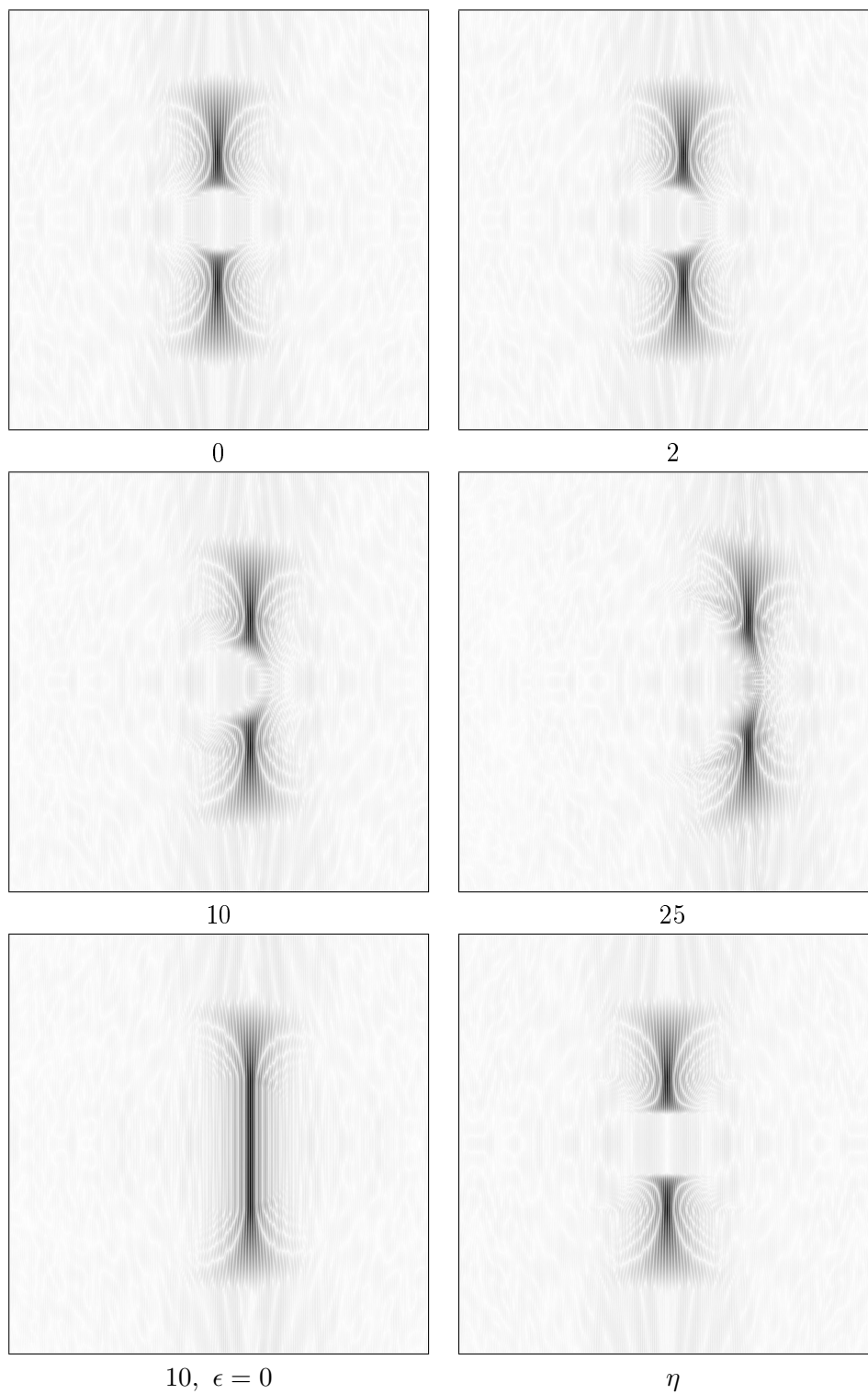
Rysunki 3.1 i 3.2 przedstawiają wyliczone numerycznie wykresy ridgeletów odpowiednio dla falek Ψ_A i Ψ_C . Jasność punktu określa $|\rho(x, y)|$; skala odcieni szarości przedstawiona jest pod wykresem na rysunku 3.3 (1 oznacza $||\rho||_1$). Współrzędne x i y przebiegają na każdym wykresie od -64 do 64 .

Na wszystkich wykresach $\epsilon = 1$, $i = 7$ poza przedostatnim, na którym $\epsilon = 0$, $i = 8$. Pierwsze cztery wykresy różnią się wartością parametru l . Ostatni wykres przedstawia η — przybliżenie ρ , które jest opisane później. Wartość l jest tu równa 0 — wykresy η dla różnych wartości l różnią się tylko przesunięciem.

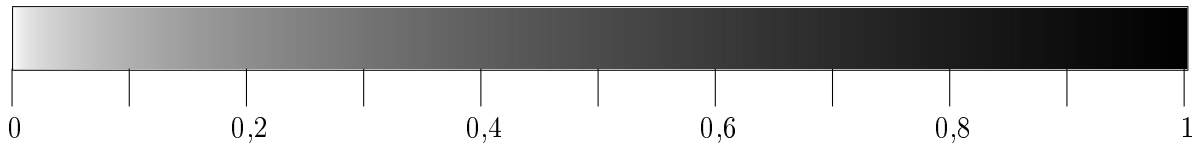
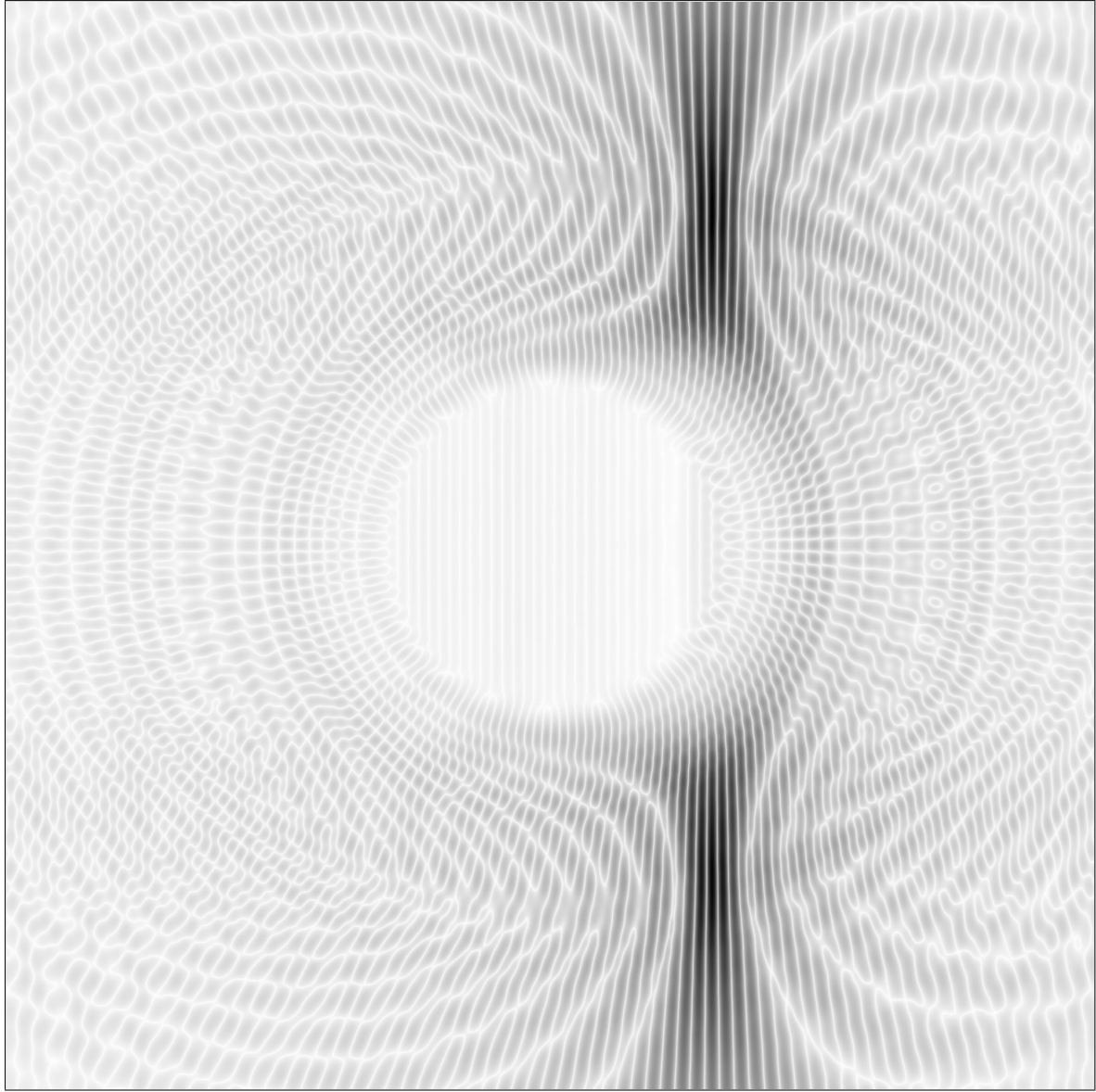
Rysunek 3.3 to powiększenie wykresu dla $l = 10$ (współrzędne przebiegają tutaj od -32 do 32). Funkcja ρ jest oscylująca; widoczne na rysunku grzbiety są na przemian dodatnie i ujemne — po drugiej każdej białej pionowej linii oraz każdej białej linii krzywej znak się odwraca. Okres regularnych oscylacji poziomych (białe pionowe linie) jest mniej więcej równy 1.



Rysunek 3.1: Wykresy ρ dla różnych wartości l , oraz η (Ψ_A jako falka na prostej).



Rysunek 3.2: Wykresy ρ dla różnych wartości l , oraz η (Ψ_C jako falka na prostej).



Rysunek 3.3: Powiększenie wykresu ρ dla $\Psi_A, l = 10, \epsilon = 0, i = 7$, oraz skala szarości.

3.1. Przybliżenie

Poniższe przybliżenie nie nadaje się szacowania wartości $\rho_{l,1,i}(x, y)$ (nieznaczące indeksy j i k pomijamy) i pochodnych — chociaż można próbować policzyć drugą normę różnicy między ρ a przybliżeniem — ale daje się dosyć dobrze policzyć i dosyć dobrze oddaje kształt, szczególnie dla większych i .

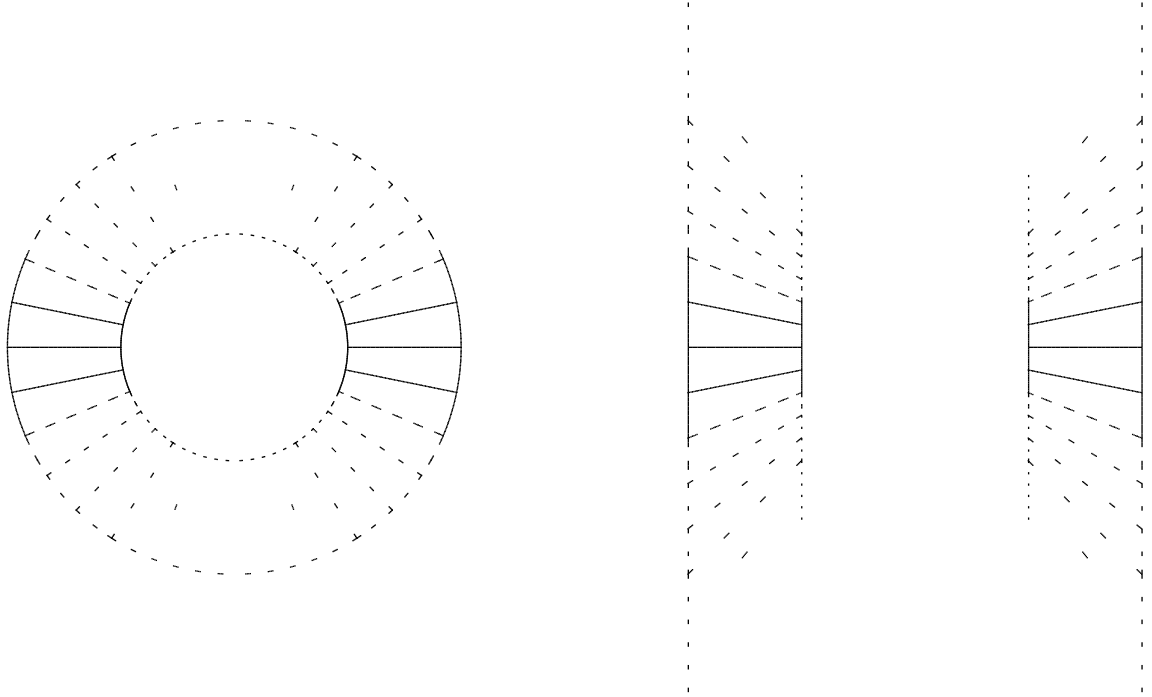
Jak pamiętamy z konstrukcji (2.14), wartość transformaty Fouriera funkcji $\widehat{\rho}_{l,1,i}$ w punkcie ωu , $u = e^{i\phi}$, zadana jest wzorem

$$\widehat{\rho}(\omega u) = |\omega|^{-1/2}(\widehat{t}_\tau(\omega)s_\sigma(u) + \widehat{t}_\tau(-\omega)s_\sigma(-u)). \quad (3.1)$$

Funkcja $s_{1,i,1/2}$ jest określona na okręgu ($u = e^{i\theta}$). Jeśli i jest duże, to funkcja $s_{1,i,1/2}$ jest mała w punktach określonych przez duże θ . Przybliżenie opiera się na zastąpieniu $u = e^{i\theta}$ przez $u = 1 + i\theta$, co (po przyjęciu $s_\sigma(-u) = 0$) prowadzi do:

$$\widehat{\eta}(\omega, \nu) = |\omega|^{-1/2}(\widehat{t}_\tau(\omega)\widetilde{s}_\sigma(1 + i(\nu/\omega))) \quad (3.2)$$

Funkcję $s_\sigma(e^{it})$ zdefiniowaliśmy wzorem $s_\sigma(e^{it}) = \sum_k (2\pi)^{-1/2}\Psi_{i,0}(k + t/2\pi)$, zatem na potrzeby przybliżenia $\widetilde{s}_\sigma(1 + i(\nu/\omega)) = (2\pi)^{-1/2}\Psi_{i,0}(\nu/2\pi\omega)$. Rysunek 3.4 schematycznie ukazuje, czym się różni kształt $\widehat{\rho}$ i $\widehat{\eta}$.



Rysunek 3.4: Schematyczne wykresy $\widehat{\rho}$ (z lewej) i $\widehat{\eta}$ (z prawej).

Przejsie od $\widehat{\eta}$ do η jest łatwiejsze do obliczenia niż dla ρ . Niech $\eta_1 = (I \otimes \mathcal{F}^{-1})(\widehat{\eta})$; mamy $\eta = (\mathcal{F}^{-1} \otimes I)\eta_1$. Niech $\widetilde{y} = 2\pi y/2^i$. Wykonując różniczkowanie najpierw po y (przejście z $\widehat{\eta}$ do η_1), a następnie po x (przejście z η_1 do η) otrzymujemy:

$$\widehat{\eta}(\omega, \nu) = |2\pi\omega|^{-1/2}\widehat{t}_\tau(\omega)\Psi_i(\nu/2\pi\omega) \quad (3.3)$$

$$\eta_1(\omega, y) = (2\pi)^{-1/2} |2\pi\omega|^{+1/2} \widehat{t}_\tau(\omega) \widehat{\Psi}_i(2\pi\omega y) \quad (3.4)$$

$$\eta_1(\omega, y) = (2\pi)^{-1/2} |2^{i+1}\pi\omega|^{+1/2} \widehat{t}_\tau(\omega) \widehat{\Psi}(2\pi\omega y/2^i) \quad (3.5)$$

$$\eta(x, y) = (2\pi)^{-1} (2^{i+1}\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{1/2} \gamma(\omega) \gamma(\widetilde{y}\omega) e^{i\omega(x-l+1/2)} d\omega \quad (3.6)$$

Z ostatniego wzoru widać, że $\eta(x, y) = 0$, jeśli $|\widetilde{y}|$ jest mniejsze niż $1/4$ lub większe niż 4 (nośniki $\gamma(\omega)$ i $\gamma(\widetilde{y}\omega)$ są wówczas rozłączne). (Wykresy η na rysunkach 3.1 i 3.2 nie są zerowe w tych przedziałach (są lekko szare); wynika to z błędów przybliżeń w obliczeniach numerycznych.) Należy się spodziewać, że η osiąga największą wartość dla $x - l + 1/2 = 0$ oraz $\widetilde{y} = 1$.

Porównanie wykresów prawdziwych ridgeletów i przybliżeń pokazuje, że prawdziwe ridgelety trochę zakręcają wokół 0. Poza tym, wykresy są dość podobne. Z własności transformaty Fouriera wynika, że dla prawdziwych ridgeletów wartości ρ dla za małych i za dużych $|y|$ nie mogą być równe 0, chociaż są rzeczywiście małe.

Układ funkcji η jest nie tylko przybliżeniem ridgeletów ρ , ale jest także interesującym układem funkcji, o własnościach zbliżonych do własności ridgeletów. Jest to baza ortonormalna. Konstrukcja η daje się łatwo uogólnić na większą liczbę wymiarów. Ridgelety były zadane przez izometrię (patrz wzory 2.13 i 2.15)

$$\mathcal{I} = \mathcal{F}_d^{-1} C(\mathcal{F}_1 \otimes I) = \alpha_d R^*(\Delta^{d-1} \otimes I), \quad (3.7)$$

gdzie R^* jest operatorem sprzężonym do transformaty Radona; dla „pseudoridgeletów” η odpowiednią izometrię można zapisać jako

$$\widetilde{\mathcal{I}} = \mathcal{F}_d^{-1} \widetilde{C}(\mathcal{F}_1 \otimes I) = \beta_d E^*(\Delta^{d-1} \otimes I), \quad (3.8)$$

gdzie $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{d-1})$

$$E^* f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x + z \cdot y, z) dz. \quad (3.9)$$

Operator sprzężony do E^* jest postaci

$$E f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x - z \cdot y, z) dz; \quad (3.10)$$

podobnie jak dla transformaty Radona, mamy tutaj całki po hiperpłaszczyznach, z tym, że hiperpłaszczyzny są tu inaczej rozłożone.

Funkcje η mogłyby być pod pewnymi względami lepsze od ridgeletów ρ . W przypadku η wszystkie cztery parametry i, j, k i l wpływają na kształt funkcji w bardzo prosty sposób (przekształcenia afiniczne), a w przypadku ρ tylko j i k , co mogłoby mieć znaczenie praktyczne (wystarczy policzyć tylko jedną). Uogólnienie ridgeletów na wyższe wymiary natrafiło na problem z brakiem falek na sferze; w przypadku η zamiast sfery mamy hiperpłaszczyznę, na której faleki są znane. Wadą funkcji η jest to, że nie wszystkie kierunki są równoważne (kierunek poziomy jest wyróżniony).

3.2. Oszacowanie ρ w pobliżu 0

Na wykresach dla $\epsilon = 1$ widzimy, że $\rho(x)$ jest małe dla punktów $x \in \mathbb{R}^2$ bliskich 0. W tej części podamy wyjaśnienie tego faktu.

Jest to prawda tylko dla $\epsilon = 1$. Wartość funkcji ρ w zerze jest bowiem równa $t_\tau^+(0) \int_{\mathbb{T}} s_\sigma(u) du$ (ze wzoru 2.22); jeśli $\epsilon = 0$, to całka $\int_{\mathbb{T}} s_\sigma(u) du$ jest niezerowa (jako całka z funkcji skalującej); $t_\tau(0)$ zazwyczaj również jest niezerowe.

Ze wzoru (2.22) wiemy, że $\rho_{\tau,\sigma} = L_\sigma(t_\tau^+)$, gdzie operator $L_\sigma : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ zadany jest wzorem ($\alpha'_2 = \alpha_2\sqrt{2}$)

$$L_\sigma(f)(x) = \alpha'_2 \int_{\mathbb{T}} f(x \cdot u) s_\sigma(u) du. \quad (3.11)$$

Z definicji funkcji $s_{1,i}$ mamy, że (punkt x zapisujemy w biegunowym układzie współrzędnych jako $x = re^{i\theta}$)

$$L_\sigma(f)(x) = \alpha'_2 \int_0^{2\pi} f(r \cos(\theta - \phi)) s_\sigma(e^{i\phi}) d\phi \quad (3.12)$$

$$= \alpha'_2 (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos(\theta - \phi)) \Psi_{i,0}(\phi/2\pi) d\phi \quad (3.13)$$

Jeśli $f(t) = t^k$, to przez zapisanie funkcji $\cos^k \alpha$ w postaci sumy $\sum_{l=-k}^k A_l e^{il\alpha}$ mamy:

$$L(f)(x) = \alpha'_2 (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (r \cos(\theta - \phi))^k \Psi_{i,0}(\phi/2\pi) d\phi \quad (3.14)$$

$$= \alpha'_2 (2\pi)^{-1/2} r^k \sum_l A_l \int_{-\infty}^{\infty} e^{il(\theta - \phi)} \Psi_{i,0}(\phi/2\pi) d\phi \quad (3.15)$$

$$= \alpha'_2 (2\pi)^{+1/2} r^k \sum_l A_l e^{il\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi l(\phi/2\pi)} \Psi_{i,0}(\phi/2\pi) d\phi/2\pi \quad (3.16)$$

$$= \alpha'_2 (2\pi)^{+1/2} r^k \sum_l A_l e^{il\theta} \widehat{\Psi}_{i,0}(2\pi l) \quad (3.17)$$

Z definicji falek Meyera wiemy, że $\widehat{\Psi}_{i,0}(2\pi l)$ jest równe 0 dla $|2\pi l| < 2^{i+1}\pi/3$. Zatem $L(f) = 0$ dla funkcji f będących wielomianami stopnia $m \leq 2^i/3$. Ze wzoru (3.11) widać, że

$$|L(f - g)(x)| \leq \alpha'_2 \|f - g\|_\infty \|s_{1,i}\|_1, \quad (3.18)$$

gdzie przez $\|f - g\|_\infty$ rozumiemy normę supremum na odcinku $[-r, r]$, bo $x \cdot u$ zawsze należy do tego odcinka ($x = re^{i\theta}$). Należy więc oszacować $E_m(t_{0,l}^+)$, czyli błąd oszacowania funkcji $t_{0,l}^+$ przez wielomian f stopnia $m \leq 2^i/3$ na odcinku $[-r, r]$.

W tym celu skorzystamy z następującego tw. Jacksona [Pleś00]:

Twierdzenie 3.1 (Jackson) *Jeśli f jest klasy C^k na przedziale $[-r, r]$ oraz $m > k$, to*

$$E_m(f) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \frac{r^k \|f^{(k)}\|_\infty}{(m+1)^{\underline{k}}}, \quad (3.19)$$

gdzie $a^{\underline{k}} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)$.

Pochodne t^+ można łatwo oszacować z transformaty Fouriera:

$$\|(t^+)^{(k)}\|_\infty \leq (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}((t^+)^{(k)}) (\omega)| d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\omega) \omega^k| |\omega|^{1/2} d\omega \quad (3.20)$$

$$\leq 2(2\pi)^{-1/2} \int_0^{\frac{8\pi}{3}} (2\pi)^{1/2} |\omega|^{k+1/2} d\omega \quad (3.21)$$

$$\leq \frac{2}{k+3/2} \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{k+3/2} \quad (3.22)$$

Po podstawieniu wzorów 3.19 i 3.22 do 3.18 otrzymujemy:

Twierdzenie 3.2 Dla każdych k i m spełniających $k < m < 2^i/3$

$$\rho_{0,l,1,i,j}(re^{i\theta}) \leq \alpha'_2 \|s_{1,i}\|_1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^k r^k \frac{2 \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{k+3/2}}{\left(k + \frac{3}{2}\right)(m+1)^k} \quad (3.23)$$

$$\leq 16 \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} \alpha'_2 \|s_{1,i}\|_1 \frac{\left(\frac{4\pi^2 r}{3}\right)^k}{\left(k + \frac{3}{2}\right)(m+1)^k}. \quad (3.24)$$

Oszacowanie jest tym lepsze, im większe jest m ; najlepsze jest zatem dla $m = \lfloor 2^i/3 \rfloor$ (najmniejszej liczby całkowitej nie przekraczającej $2^i/3$).

Jeśli chodzi o k , to najlepsze oszacowanie otrzymujemy dla największego k , dla którego $m+2-k \geq \frac{4\pi^2 r}{3}$ ($m+2-k$ jest nowym czynnikiem dochodzącym do mianownika przy zwiększeniu k , a $\frac{4\pi^2 r}{3}$ — nowym czynnikiem dochodzącym do licznika; dla uproszczenia nie uwzględniamy zmieniającego się czynnika $k + \frac{3}{2}$). Mamy zatem $k \leq m+2 - \frac{4\pi^2 r}{3}$ i jednocześnie $k < m$ (warunek z Twierdzenia 3.1). Jeśli r jest małe ($\frac{4\pi^2 r}{3} < 3$), to możemy przyjąć $k = m-1$ (mamy wówczas $(m+1)^k = (m+1)!/2$), w przeciwnym razie największe możliwe jest $k = \lfloor m+2 - \frac{4\pi^2 r}{3} \rfloor$.

3.3. Oszacowanie ρ daleko od 0

Ograniczenie na $\rho(x)$ dla dużych wartości $|x|$ wynika z własności transformaty Fouriera.

Fakt 3.3 Jeśli \hat{t}_τ jest funkcją klasy C_l , to dla pewnej stałej C $\rho_{\tau,\sigma}(x) \leq C|x|^{-l}$.

Dowód. Jeśli pochodna $\hat{\rho}$ po ω_k istnieje i jest funkcją całkowlaną, to

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{d\hat{\rho}}{d\omega_k} \right) (x) = ix_k \rho(x). \quad (3.25)$$

Ze wzoru na $\hat{\rho}$ wynika, że jeśli funkcje s_σ i \hat{t}_τ są klasy C^l , to $\hat{\rho}$ również. Funkcja s_σ jest klasy C^∞ (jako falka Meyera). Ze wzoru 3.25 oraz tego, że $\|f\|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \|f\|_1$ łatwo można wywnioskować, że $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_d^{l_d} \rho(x_1 \dots x_d)$ szacuje się przez normę L_1 odpowiedniej pochodnej $\hat{\rho}$. ■

Bibliografia

- [Cand98] E. J. Candès, *Ridgelets: Theory and Applications*. Ph. D. Thesis, Stanford University.
- [Cand01] E. J. Candès, *New Ties between Computational Harmonic Analysis and Approximation Theory*, 2001.
- [Dono99] D. L. Donoho, *Tight frames of k -plane Ridgelets and the problem of representing objects which are smooth away from d -dimensional singularities in \mathbb{R}^n* , Proc. Natl. Acad. Sci. USA 96 (1999), 1828-1833.
- [Dono00] D. L. Donoho, *Orthonormal ridgelets and linear singularities*, SIAM J. Math. Anal. 31 (2000), 1062-1069.
- [Dono01] D. L. Donoho, *Ridge functions and orthonormal ridgelets*, J. Approx. Theory 111 (2001), 143-179.
- [Pleś00] W. Pleśniak, *Wykłady z teorii aproksymacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2000.
- [Wojt00] P. Wojtaszczyk, *Teoria falek*, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2000.

Wszystkie wymienione prace E. J. Candès a i D. L. Donoho są dostępne na ich stronach internetowych.