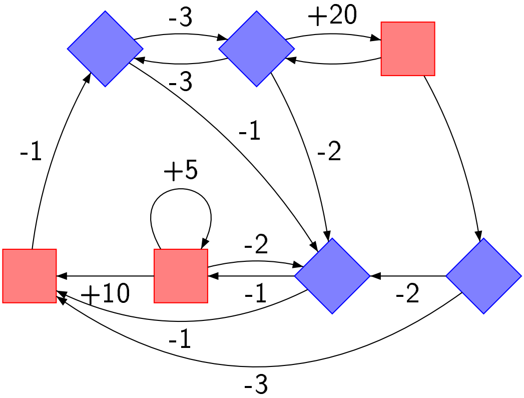
Half-Positional Determinacy of Infinite Games

Eryk Kopczyński

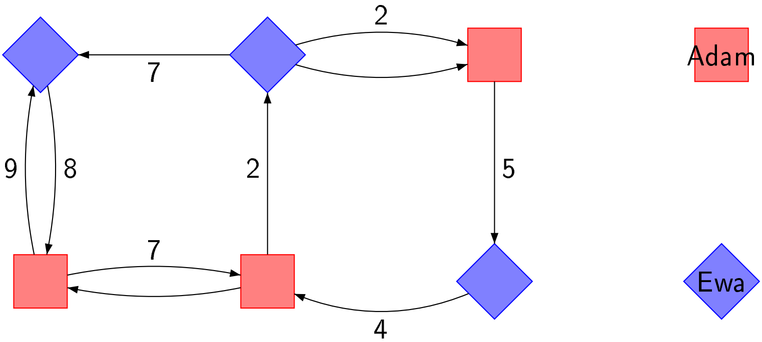
Warsaw University

8 kwietnia 2009

przykład: gra z wypłatą średnią



przykład: gra parzystości



Ewa wygrywa wtw największa liczba występująca nieskończenie często jest parzysta.

Gry

C = zbiór kolorów

Gra = arena + warunek zwycięstwa

Arena:
$G = (\mathrm{Pos}_A, \mathrm{Pos}_E, \mathrm{Mov})$ gdzie $\mathrm{Pos} = \mathrm{Pos}_A \cup \mathrm{Pos}_E$,
$\mathrm{Mov} \subseteq \mathrm{Pos} \times \mathrm{Pos} \times (C \cup \{\epsilon\})$

Warunek zwycięstwa:
Podzbiór $W \subseteq C^\omega$; zakładamy, że jest niezależny od prefiksu, t.j.
$u \in W \iff cu \in W$

Rozgrywki i strategie

Rozgrywka π to (skończony lub nieskończony) ciąg kolejnych ruchów: $\mathrm{source}(\pi_{n+1}) = \mathrm{target}(\pi_n)$.
Play_E — rozgrywki skończone, kończące się w pozycji Ewy

Strategią dla Ewy nazywamy funkcję częściową $s : \mathrm{Play}_E \to \mathrm{Mov}$ mówiącą, co Ewa powinna zrobić w danej sytuacji (obecna pozycja, historia gry).

Strategia s jest wygrywająca dla Ewy jeśli Ewa wygrywa każdą rozgrywkę zgodną z s.

Strategia s jest pozycyjna jeśli $s(\pi)$ zależy tylko do $\mathrm{target}(\pi)$.

Determinacja

Gra (G, W) jest **zdeterminowana** jeśli dla każdej pozycji początkowej jeden z graczy ma strategię wygrywającą. (Nie wszystkie gry nieskończone są zdeterminowane.) Jeśli gra jest zdeterminowana, mamy $\mathrm{Pos} = \mathrm{Win}_E \cup \mathrm{Win}_A$ i strategie s_E i s_A wygrywające z pozycji ze zbiorów Win_E i Win_A.

Półpozycyjna determinacja

Warunek zwycięstwa W jest **(skończenie) półpozycyjny**, jeśli dla każdej (skończonej) areny, dla każdej pozycji albo Ewa ma pozycyjną strategię wygrywającą, albo Adam ma strategię wygrywającą.

warunki Büchi i co-Büchi

$S \subseteq C$

Warunek Büchi: $WB_S = C^*(SC)^\omega$

Ewa chce, by kolory z S pojawiały się nieskończenie często.

Warunek co-Büchi: $WB'_S = C^*(C - S)^\omega$

Ewa chce, by kolory z S pojawiały się tylko skończenie często.

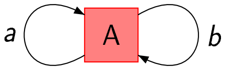
Warunki Büchi i co-Büchi są pozycyjne.

... i ich suma

Suma. $C = \{a, b, c\}, W = WB'_{\{a\}} \cup WB'_{\{b\}}$. Ewa chce, by co najmniej jedna z liter a i b pojawiała się tylko skończenie wiele razy.

Dlaczego półpozycyjny: Jeśli Ewa może wygrać, to może ona unikać jednej konkretnej z dwóch liter a i b, co można osiągnąć przy użyciu strategii pozycyjnej.

Dlaczego nie pozycyjny:

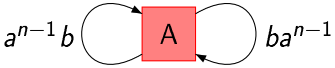


n kolejnych liter a

Następny przykład. $C = \{a, b\}$, Ewa chce, by a^n pojawiało się tylko skończenie wiele razy.

Dlaczego półpozycyjny: Jeśli Ewa może wygrać, to może wygrać zawsze zachowując się tak, jakby była w najgorszej możliwej sytuacji (czyli liczba liter a, które ostatnio się pojawiły, była jak największa). To można zrobić przy użyciu strategii pozycyjnej.

Dlaczego nie pozycyjny:



Znane wyniki o (pozycyjnej) determinacji

Twierdzenie[Martin, 1975] Borelowskie warunki zwycięstwa są zdeterminowane.

Twierdzenie[Emerson-Jutla, Mostowski 1991] Warunek parzystości

$$WP_n = \{w \in \{0, \ldots, n\}^\omega : 2 | \limsup_{n\to\infty} w_n\} \tag{1}$$

jest pozycyjny.

c.d.

Twierdzenie[Ehrenfeucht, Mycielski 1979] Gry z wypłatą średnią są skończenie pozycyjne.

Twierdzenie[Klarlund 1992] Warunki Rabina są półpozycyjne.

c.d.

Twierdzenie[Colcombet, Niwiński 2006] Warunek zwycięstwa (niezależny od prefiksu) $W \subseteq C^\omega$ jest pozycyjny wtw gdy jest uogólnionym warunkiem parzystości, tzn. równoważny z warunkiem parzystości przez zamianę nazw kolorów.

(To twierdzenie działa w sytuacji, gdy kolory przypisujemy krawędziom. Jeśli kolory przypisujemy wierzchołkom, to jest więcej warunków pozycyjnych.)

Twierdzenie[Gimbert, Zielonka 2005] Warunek zwycięstwa $W \subseteq C^\omega$ jest skończenie pozycyjny wtw zwycięzca może wygrać używając strategii pozycyjnej dla każdej areny, w której wszystkie pozycje należą do tego samego gracza.

Przykłady warunków półpozycyjnych

Wklęsłość

Warunek W jest **wypukły** gdy dla wszystkich ciągów słów (u_n), $u_n \in C^*$, jeśli

- $u_1 u_3 u_5 u_7 \ldots \in W$,
- $u_2 u_4 u_6 u_8 \ldots \in W$,

to $u_1 u_2 u_3 u_4 \ldots \in W$.

Warunek zwycięstwa jest **wklęsły** gdy jego dopełnienie jest wypukłe.

Wklęsłość

Twierdzenie Wklęsłe warunki zwycięstwa są skończenie półpozycyjne.

Przykład. Warunki parzystości są i wklęsłe, i wypukłe.

Automaty monotoniczne

Warunkiem monotonicznym nazywamy warunek $WM_A = C^\omega - L_A^\omega$, gdzie L_A jest językiem rozpoznawanym przez automat monotoniczny, czyli deterministyczny automat skończony z monotoniczną funkcją przejścia.

- Zbiór stanów $Q = \{0, \ldots, n\}$;
- 0 jest stanem początkowym, n jest jedynym stanem akceptującym,
- Funkcja przejścia σ jest monotoniczna, t.j. jeśli $q \geqslant q'$, to $\sigma(q, c) \geqslant \sigma(q', c)$.

Przykłady warunków monotonicznych: Ewa wygrywa, gdy tylko skończenie wiele razy pojawia się jeden z następujących ciągów: a^n, $a^{n-1}b$, ba^{n-1}.

Twierdzenie Warunki monotoniczne są półpozycyjne.

Ogólne własności półpozycyjnych warunków zwycięstwa

Podstawowe narzędzia

Twierdzenie Niech $W \subseteq C^\omega$ będzie warunkiem zwycięstwa takim, że dla każdej niepustej areny G nad C, istnieje pozycja $v \in G$ taka, że w grze (G, W) albo Ewa ma pozycyjną strategię wygrywającą z v, albo Adam ma dowolną strategię wygrywającą z v.
Wówczas W jest półpozycyjny.

Powyższe twierdzenie ma odpowiedniki dla innych typów determinacji.

Rozszerzanie warunkami Büchi

Twierdzenie Niech $W \subseteq C^\omega$ będzie półpozycyjnym warunkiem zwycięstwa, i $S \subseteq C$. Wówczas $W \cup WB_S$ jest również półpozycyjnym warunkiem zwycięstwa.

Ewa wygrywa gdy wygra zgodnie z W albo gdy kolory z S występują nieskończenie często.

Rozszerzanie warunkami Büchi

Twierdzenie Niech $W \subseteq C^\omega$ będzie półpozycyjnym warunkiem zwycięstwa, i $S \subseteq C$. Wówczas $W \cup WB_S$ jest również półpozycyjnym warunkiem zwycięstwa.

Ewa wygrywa gdy wygra zgodnie z W albo gdy kolory z S występują nieskończenie często.

To twierdzenie również ma odpowiedniki dla innych typów determinacji. Przez zastosowanie wersji pozycyjnej n razy łatwo otrzymujemy pozycyjną determinację warunku parzystości.

Domknięcie na sumę?

Jeśli W jest półpozycyjny, to $W \cup WB_S$ również.

Domknięcie na sumę?

Jeśli W jest półpozycyjny, to $W \cup WB_S$ również.
Czy tak jest zawsze: jeśli W_1 i W_2 są półpozycyjne, to $W_1 \cup W_2$ również?

Domknięcie na sumę?

Jeśli W jest półpozycyjny, to $W \cup WB_S$ również.

Czy tak jest zawsze: jeśli W_1 i W_2 są półpozycyjne, to $W_1 \cup W_2$ również?

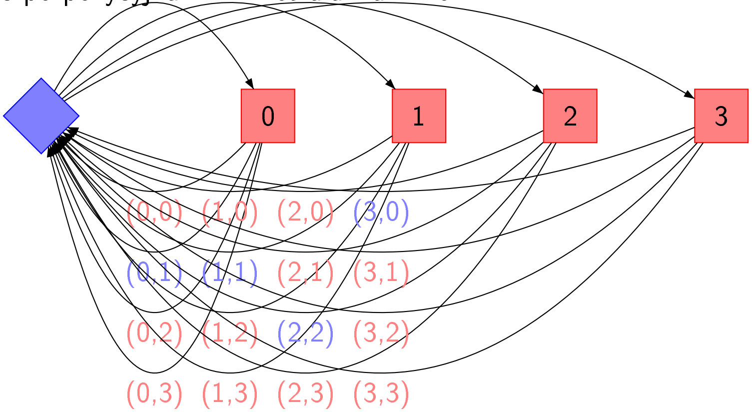
Warunki wklęsłe są domknięte na sumę.

Warunki monotoniczne są domknięte na sumę.

Suma warunku wklęsłego i monotonicznego jest również skończenie półpozycyjna.

Suma nieskończona

Suma nieprzeliczalnej rodziny warunków półpozycyjnych nie musi być półpozycyjna — nawet dla warunków Büchi.



Warunki pozycyjno/zawieszalne

Definicja. W jest warunkiem **pozycyjno/zawieszalnym** wtw dla każdej areny G Ewa zawsze ma pozycyjną strategię w Win_E, a Adam ma zawieszalną strategię w Win_A.

Strategia Adama jest zawieszalna jeśli od czasu do czasu Adam może wstrzymać jej używanie (i robić coś innego), by wrócić do niej później, i wtedy również wygrywa (o ile gra nie opuściła Win_A).

przykłady warunków pozycyjno-zawieszalnych

Następujące warunki są pozycyjno/zawieszalne:

- Warunek Co-Büchi WB'_S.

przykłady warunków pozycyjno-zawieszalnych

Następujące warunki są pozycyjno/zawieszalne:

- Warunek Co-Büchi WB'_S.
- Warunek geometryczny $WF(A)$ dla otwartej półprzestrzeni A.

przykłady warunków pozycyjno-zawieszalnych

Następujące warunki są pozycyjno/zawieszalne:

- Warunek Co-Büchi WB'_S.
- Warunek geometryczny $WF(A)$ dla otwartej półprzestrzeni A.
- Warunki monotoniczne.

przykłady warunków pozycyjno-zawieszalnych

Następujące warunki są pozycyjno/zawieszalne:

- Warunek Co-Büchi WB'_S.
- Warunek geometryczny $WF(A)$ dla otwartej półprzestrzeni A.
- Warunki monotoniczne.
- Przeliczalne sumy warunków pozycyjno/zawieszalnych.

Warunki XPS

Definicja. Klasa **warunków XPS** nad C to najmniejszy zbiór warunków zwycięstwa zawierający wszystkie warunki Büchi i pozycyjno/zawieszalne, domknięty na przecięcie z warunkami co-Büchi, i na skończoną sumę.

Twierdzenie Warunki XPS są półpozycyjne.

Upraszczanie aren

Warunek zwycięstwa $L \subseteq C^\omega$ jest ω-regularny wtw jest akceptowany przez DFA z warunkiem parzystości.

Upraszczanie aren

Warunek zwycięstwa $L \subseteq C^\omega$ jest ω-regularny wtw jest akceptowany przez DFA z warunkiem parzystości.

Twierdzenie Jeśli W jest ω-regularny i nie jest skończenie półpozycyjny, to istnieje arena-świadek (t.j. taka, że Ewa ma strategię wygrywającą, ale nie ma pozycyjnej strategii wygrywającej)

Upraszczanie aren

Warunek zwycięstwa $L \subseteq C^\omega$ jest ω-regularny wtw jest akceptowany przez DFA z warunkiem parzystości.

Twierdzenie Jeśli W jest ω-regularny i nie jest skończenie półpozycyjny, to istnieje arena-świadek (t.j. taka, że Ewa ma strategię wygrywającą, ale nie ma pozycyjnej strategii wygrywającej) z tylko jedną pozycją Ewy i dwoma ruchami z tej pozycji (bez ograniczeń na ruchy i pozycje Adama).

Rozstrzygalność

Twierdzenie Niech W będzie (niezależnym od prefiksu) ω-regularnym warunkiem zwycięstwa, rozpoznawanym przez DFA z warunkiem parzystości o n stanach. Wówczas skończona półpozycyjna determinacja W jest rozstrzygalna w czasie $O(n^{n^2})$.

Idea algorytmu: Sprawdzenie wszystkich aren z jedną pozycją Ewy i dwoma ruchami.

Problemy otwarte

Problemy otwarte:

- Czy suma warunków półpozycyjnych też jest półpozycyjna?
- Czy wszystkie warunki półpozycyjne są w klasie XPS?
- inne własności domknięcia klasy warunków półpozycyjnych? nowe przykłady?
- Co z nieskończoną półpozycyjnością warunków ω-regularnych? Czy jest równoważna skończonej półpozycyjności? Czy podany algorytm jest optymalny? Może istnieją prostsze charakteryzacje?
- ...

Rozszerzenia

W jaki sposób można nasze wyniki uogólnić:

- Strategie ze skończoną pamięcią, strategie uparte?
- Funkcje wypłaty zamiast zwycięstwa/przegranej?
- Warunki zwycięstwa zależne od prefiksu?
- Areny z kolorowanymi pozycjami?
- Gry stochastyczne?

Podsumowanie

Podsumowanie

- gry nieskończone — podstawowe przykłady i definicje
- przykłady: warunki wklęsłe i monotoniczne
- własności domknięcia
- strategie zawieszalne
- ω-regularne warunki zwycięstwa, rozstrzygalność skończonej półpozycyjności
- plany na przyszłość

koniec