Zadania domowe z Analizy matematycznej II.2 – seria 6 (24.05.2018)

Rok akad. 2017/18, semestr letni, grupa nr 1

Zadanie 1. Obliczyć całkę

$$\int_S xy\, dydz + yz\, dzdx + xz\, dxdy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni czworościanu w $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)\}$ ograniczonego płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Zadanie 2. Obliczyć całkę

$$\int_S (x+z)\, dydz + (x+y)\, dzdx + (y+z)\, dxdy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną brzegu obszaru

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < R^2,\ x+y+z < 2R,\ z > 0\}, \qquad R > 0.$$

Zadanie 3. Obliczyć całkę z formy $\omega = x^3\ dy \wedge dz$ po połówce torusa zadanej przez parametryzację

$$x = (4+\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (4+\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = \sin\theta, \qquad \varphi \in (0,\pi),\ \theta \in [0,2\pi],$$

zorientowanej „na zewnątrz”.

Zadanie 4. Niech S będzie fragmentem paraboloidy $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4z\}$ złożonym z punktów, których odległość od prostej $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=2, y=0\}$ jest mniejsza od 1. Paraboloida jest zorientowana tak, że w każdym jej punkcie wektor normalny wyznaczający orientację ma składową z-ową dodatnią. Obliczyć strumień pola wektorowego $\operatorname{rot} F$ przez powierzchnię S dla

$$F(x,y,z) = \Big(-\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x-z}\Big).$$

Zadanie 5. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem ∂U klasy C^1 i niech $f \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$. Wykazać, że

$$\int_U \Delta f\ d\lambda_n = \int_{\partial U} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\ d\sigma_{n-1} \qquad \text{oraz} \qquad \int_U \langle \nabla f, \nabla g\rangle\ d\lambda_n = -\int_U f\Delta g\ d\lambda_n + \int_{\partial U} f\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\ d\sigma_{n-1},$$

gdzie ∇ jest gradientem funkcji, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ laplasjanem, a $\vec{n}$ wersorem normalnym do ∂U skierowanym „na zewnątrz”.

Zadanie 6. Niech ω będzie ciągłą n-formą różniczkową na $\mathbb{R}^n$ o zwartym nośniku. Udowodnić, że $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega = d\eta$ dla pewnej $(n-1)$-formy różniczkowej η klasy C^1 na $\mathbb{R}^n$ o zwartym nośniku.

Termin dostarczenia rozwiązań: 7.06.2018