# Zadania domowe z Analizy matematycznej II.2 – seria 5 (7.05.2018)

Rok akad. 2017/18, semestr letni, grupa nr 1

**Zadanie 1.** Obliczyć całki:

(a)

$$\int_C \frac{(x+y)\;dx - (x-y)\;dy}{x^2+y^2},$$

gdzie $C \subset \mathbb{R}^2$ jest okręgiem o równaniu $x^2+y^2=a^2$, $a>0$, ze standardową orientacją,

(b)

$$\int_\Gamma (2a-y)\;dx + x\;dy,$$

gdzie $\Gamma$ jest łukiem cykloidy z parametrem $a>0$ skierowanym od punktu $(2a\pi, 0)$ do $(0,0)$.

**Zadanie 2.** Niech $P, Q : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U$ jest otoczeniem punktu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, są funkcjami ciągłymi, które są różniczkowalne w punkcie $(x_0, y_0)$. Pokazać, że

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r^2} \int_{C((x_0,y_0),r)} P\;dx + Q\;dy = \pi\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)\Big),$$

gdzie $C((x_0,y_0),r) \subset \mathbb{R}^2$ jest okręgiem o środku w punkcie $(x_0,y_0)$ i promieniu $r>0$ ze standardową orientacją.

**Zadanie 3.** Pokazać, że jeśli $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to pole wektorowe

$$V : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, \qquad V(x) = g(\|x\|)\,x$$

jest potencjalne.

**Zadanie 4.** Udowodnić, że 1-forma

$$\omega = \frac{x\;dy}{x^2+(y-1)^2} - \frac{(y-1)\;dx}{x^2+(y-1)^2} - \frac{x\;dy}{x^2+(y+1)^2} + \frac{(y+1)\;dx}{x^2+(y+1)^2}$$

jest zamknięta, nie jest dokładna w zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1),(0,1)\}$ i jest dokładna w zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$.

**Zadanie 5.** Niech $\omega = (-2y + x^2y + x^2)\;dx + (2x - xy^2 + y^2)\;dy$. Znaleźć taki ograniczony obszar $U \subset \mathbb{R}^2$ o brzegu kawałkami $C^1$, żeby całka

$$\int_{\partial U} \omega$$

(ze standardową orientacją $\partial U$) była możliwie największa.

**Zadanie 6.** Obliczyć pole figury w $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ ograniczonej krzywą o równaniu

$$x^4 - xy^2 - y^3 = 0, \qquad x > 0,\ y < 0.$$

*Wskazówka*: Sparametryzować krzywą kładąc $y = -tx$.

Termin dostarczenia rozwiązań: 21.05.2018