Zadania domowe z Analizy matematycznej II.2 – seria 4 (23.04.2018)

Rok akad. 2017/18, semestr letni, grupa nr 1

Zadanie 1. Pokazać, że wyznacznik Grama $G(w_1, \dots, w_k) = \det[\langle w_i, w_j \rangle]_{i,j \leqslant k}$ układu k wektorów $w_1, \dots, w_k$ w $\mathbb{R}^n$, $k \leqslant n$, nie zależy od ich kolejności. Pokazać, że dla przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\varphi \text{ jest różnowartościowe } \iff [\![\varphi]\!] \neq 0,$$

gdzie $[\![\varphi]\!] = \sqrt{G(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k))}$.

Zadanie 2. Pokazać, że jeśli $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $k \leqslant n$, są przekształceniami liniowymi, to

$$[\![\varphi \circ \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cdot [\![\psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cdot |\det M_\psi|,$$

gdzie M_ψ jest macierzą ψ.

Zadanie 3. Obliczyć współrzędne środka ciężkości łuku cykloidy $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

Zadanie 4. Obliczyć

$$\int_A \frac{xy}{\sqrt{3z^2 + 1}} \, d\sigma_2,$$

gdzie $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4,\ x < y,\ y > 0\}$.

Zadanie 5. Obliczyć potencjał coulombowski w początku układu współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ pochodzący od ładunku rozłożonego na powierzchni $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = x^2 + y^2 < 1\}$ z gęstością $\varrho(x, y, z) = \sqrt{z(1 + 4z)}$. Potencjał ten równy całce

$$\int_S \frac{\rho(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|} \, d\sigma_2.$$

Zadanie 6. Niech $A \subset \mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ będzie zbiorem zadanym we współrzędnych biegunowych przez nierówność $r^2 \leqslant \cos 3\varphi$ i niech B będzie częścią górnej półsfery jednostkowej w $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ położoną ponad zbiorem A (oś OZ traktujemy jako pionową). Obliczyć $\lambda_2(A)$ i $\sigma_2(B)$.

Termin dostarczenia rozwiązań: 7.05.2018