Zadania domowe z Analizy matematycznej II.2 – seria 3 (9.04.2018)

Rok akad. 2017/18, semestr letni, grupa nr 1

Zadanie 1. Niech $f_a(x) = e^{-ax^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Obliczyć $f_a * f_b$ dla $a, b > 0$.

Zadanie 2. *Transformatą Laplace'a* funkcji całkowalnej $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję

$$\mathcal{L}f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}f(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Udowodnić *twierdzenie Borela* mówiące o tym, że

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g,$$

gdzie f, g traktujemy jako funkcje z $L^1(\mathbb{R})$ o nośniku w $[0, +\infty)$.

Zadanie 3. Obliczyć

$$\int\limits_\gamma z\, d\sigma^1, \qquad \text{gdzie} \quad \gamma = \{(t\cos t, t\sin t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0, t_0]\}, \quad t_0 > 0.$$

Zadanie 4. Obliczyć

$$\int\limits_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}\, d\sigma^1, \qquad \text{gdzie} \quad \gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = ax\}, \quad a > 0.$$

Zadanie 5. Udowodnić następującą *regułę Guldina dla powierzchni obrotowych*.
Niech γ rozmaitość 1-wymiarowa klasy C^1 zawarta w $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ i niech S powierzchnia powstała przez obrót γ wokół osi OZ w $\mathbb{R}^3$. Wtedy pole powierzchni S jest równe iloczynowi długości γ i długości drogi zakreślonej przez środek ciężkości γ, czyli

$$\sigma^2(S) = 2\pi \int\limits_\gamma x\, d\sigma^1.$$

Przy pomocy tej reguły obliczyć pole powierzchni torusa w $\mathbb{R}^3$.
Uwaga: Środek ciężkości k-wymiarowej rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$ definiuje się jako

$$\frac{1}{\sigma^k(M)} \int\limits_M (x_1, \ldots, x_n)\, d\sigma^k.$$

Zadanie 6. Obliczyć

$$\int_S (x^2 + y^2)\, d\sigma^2,$$

gdzie S jest brzegiem bryły $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$.

Zadanie 7. Znaleźć pole powierzchni brzegu bryły

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ y^2 + z^2 \leqslant a^2\}, \qquad a > 0.$$

Zadanie 8. Niech $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ i niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokazać, że dla każdych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_S f(ax + by + cz)\, d\sigma^2 = 2\pi \int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ t)\, dt.$$

Zadanie 9. Znaleźć miarę kąta bryłowego, pod którym widać z początku układu współrzędnych zbiór

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant b\}$$

dla $a, b > 0$.

Uwaga: Miara tego kąta to pole powierzchni zbioru przecięć sfery jednostkowej z półprostymi wychodzącymi z początku układu i przechodzącymi przez punkty zbioru A.

Termin dostarczenia rozwiązań: 23.04.2018