Zadania domowe z Analizy matematycznej II.2 – seria 2 (12.03.2018)

Rok akad. 2017/18, semestr letni, grupa nr 1

Zadanie 1. Niech $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $n \in \mathbb{N}$, będzie macierzą $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych. Obliczyć n-wymiarową miarę Lebesgue'a zbiorów

$$U = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i\Big)^2 < 1\Big\},$$

$$V = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{j=1}^{n} \Big|\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i\Big| < 1\Big\}.$$

Zadanie 2. Obliczyć (z dokładnym uzasadnieniem)

$$\lim_{n\to\infty} \iint_A \Big(1 + \frac{x+y}{n}\Big)^n e^{-3x-2y}\, dxdy,$$

gdzie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, x + y > 0\}$.

Zadanie 3. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a takim, że $\lambda_n(A) > 0$. Pokazać, że dla każdej liczby $q \in (0,1)$ istnieje n-wymiarowy przedział $P \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\lambda_n(A \cap P) > q\lambda_n(P)$.

Zadanie 4. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a takim, że $\lambda(A) > 0$. Pokazać, że zbiór

$$A - A \overset{\text{def}}{=} \{x - y : \ x, y \in A\}$$

ma niepuste wnętrze.

Zadanie 5. *Masą ciała* o gęstości ϱ zapełniającego zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy całkę

$$M = \iiint_A \varrho(x,y,z)\, dxdydz.$$

Znaleźć masę ciała o gęstości $\varrho = \varrho_0 e^{-\kappa\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, dla $\varrho_0, \kappa > 0$, zapełniającego zbiór

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1\}.$$

Zadanie 6. *Momentem bezwładności* jednorodnej bryły $A \subset \mathbb{R}^3$ *względem początku układu współrzędnych* nazywamy całkę

$$I_0 = \iiint_A x^2 + y^2 + z^2\, dxdydz.$$

Znaleźć moment bezwładności względem początku układu współrzędnych jednorodnej bryły ograniczonej powierzchnią

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)\}, \qquad a > 0.$$

Termin dostarczenia rozwiązań: 28.03.2018