

# Układy dynamiczne

seminarium  
dla studentów IV–V roku matematyki

**Krzysztof Barański i Anna Zdunik**

rok akademicki 2016/17

# Układy dynamiczne

# Układy dynamiczne

Pierwsze pytanie

Co to są układy dynamiczne?

## Pierwsze pytanie

Co to są układy dynamiczne?

## Definicja

**Układ dynamiczny** (dyskretny) to przestrzeń (zbiór)  $X$  i przekształcenie (funkcja)

$$f : X \rightarrow X.$$

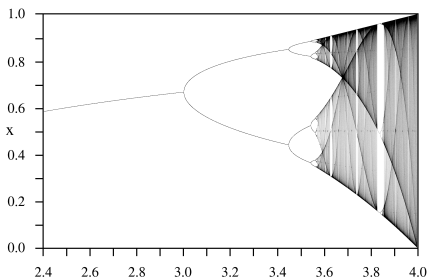
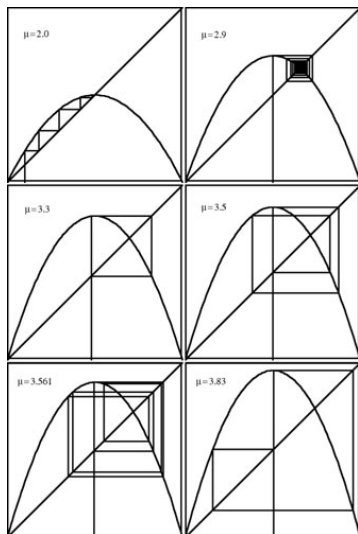
Bada się **iteracje** (wielokrotne złożenia) przekształcenia  $f$

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ razy}}(x) \quad \text{dla punktów } x \in X.$$

Interesują nas graniczne własności **trajektorii**, tzn. ciągów  $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$ , gdy  $n \rightarrow \infty$  i własności **zbiorów niezmienniczych** pod działaniem iteracji  $f$ .

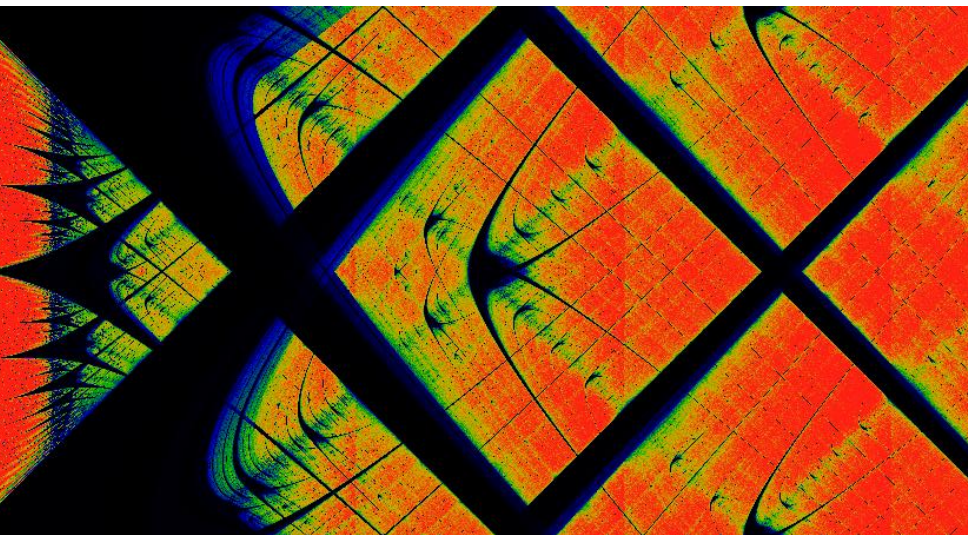
# Przekształcenia odcinka

# Przekształcenia odcinka



Bifurkacje podwojenia okresu

# Przekształcenia okręgu

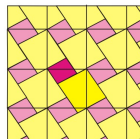
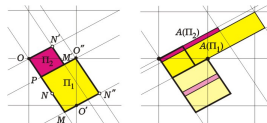


## Języki Arnoldda

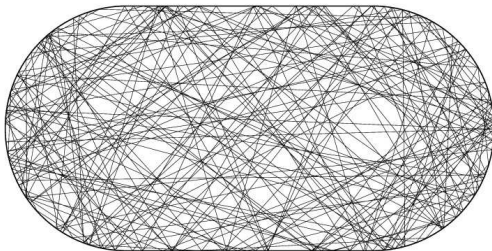
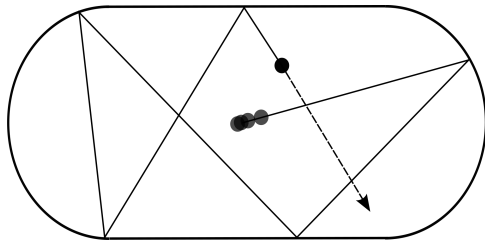


# Przekształcenia torusa

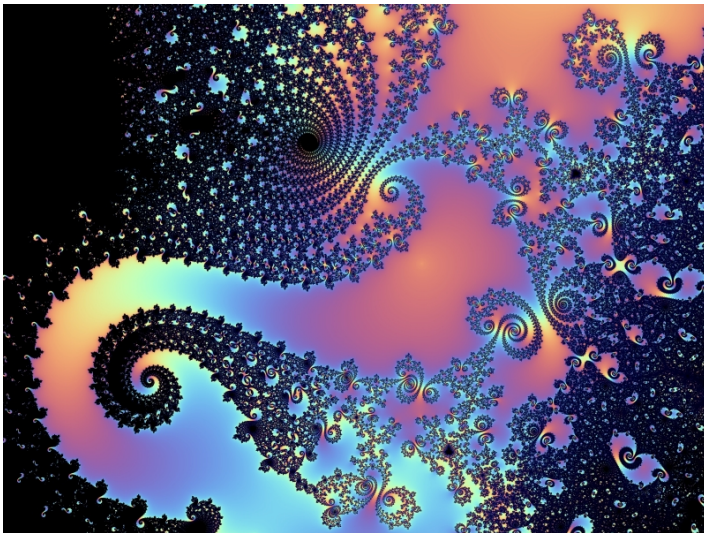
# Przekształcenia torusa







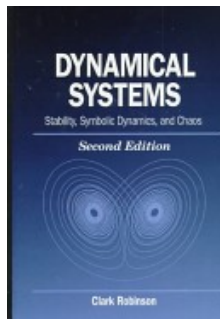
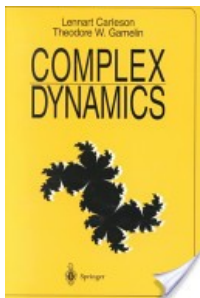
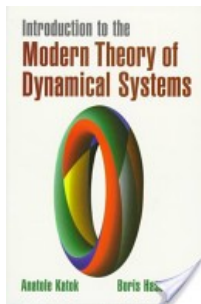
# Przekształcenia funkcji zespolonych

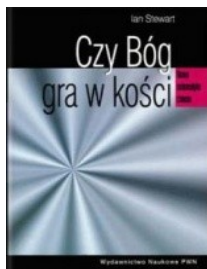


Fragment fraktalnego zbioru Julii

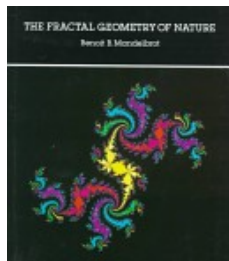
# Układy dynamiczne to szybko rozwijająca się dziedzina matematyki

Układy dynamiczne, oprócz własnych wypracowanych teorii, używają metod analizy, topologii, rachunku prawdopodobieństwa...





Ian Stewart  
*Czy Bóg gra w kości?*  
*Nowa matematyka chaosu*



Benoit Mandelbrot  
*The fractal geometry of Nature*





- L. Boltzmann (1844–1906): fizyka statystyczna
- H. Poincaré (1854–1912): mechanika nieba
- G. Birkhoff (1884–1944): twierdzenia ergodyczne
- A. Kołmogorow (1903–1987): entropia



- J. Milnor (medal Fieldsa 1962, nagroda Abela 2011)
- L. Carleson (nagroda Abela 2006)
- Y. Sinaj (nagroda Abela 2014)
- S. Smale (medal Fieldsa 1966)
- W. Thurston (medal Fieldsa 1982)
- J.-Ch. Yoccoz (medal Fieldsa 1994)
- C. McMullen (medal Fieldsa 1998)
- T. Tao (medal Fieldsa 2006)
- E. Lindenstrauss (medal Fieldsa 2010)
- S. Smirnov (medal Fieldsa 2010)
- A. Avila (medal Fieldsa 2014)

Głównym obszarem zainteresowania będzie **teoria ergodyczna układów dynamicznych**, czyli badanie stochastycznych własności tych układów przy pomocy metod pochodzących m.in. z rachunku prawdopodobieństwa i geometrycznej teorii miary.

Szczegółowa tematyka będzie dostosowana do oczekiwań uczestników.

Uczestnicy będą mogli znaleźć temat pracy magisterskiej o zróżnicowanym poziomie trudności.