

# Dynamika holomorficzna

wykład monograficzny  
dla IV – V roku matematyki

dr hab. Krzysztof Barański

rok akad. 2015/16, semestr zimowy

# Dynamika holomorficzna

# Dynamika holomorficzna

Dynamika holomorficzna jest dziedziną matematyki zajmującą się badaniem iteracji (wielokrotnych złożzeń)

$$f^n(z) = f \circ \dots \circ f(z)$$

funkcji  $f$  zmiennej zespolonej  $z$ . Funkcja  $f$  może być wielomianem, funkcją wymierną, całkowitą, meromorficzną...

# Dynamika holomorficzna

**Dynamika holomorficzna** jest dziedziną matematyki zajmującą się badaniem **iteracji** (wielokrotnych złożzeń)

$$f^n(z) = f \circ \dots \circ f(z)$$

funkcji  $f$  zmiennej zespolonej  $z$ . Funkcja  $f$  może być wielomianem, funkcją wymierną, całkowitą, meromorficzną...

Interesują nas graniczne zachowania **trajektorii**

$$z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \dots, f^n(z), \dots$$

punktów  $z$  na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$ .

# Przykład 1

# Przykład 1

## Pytanie

Jak wygląda zbiór punktów  $z$ , dla których  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| \neq \infty$ ,  
jeśli  $f(z) = z^2$  ?

# Przykład 1

## Pytanie

Jak wygląda zbiór punktów  $z$ , dla których  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| \neq \infty$ ,  
jeśli  $f(z) = z^2$  ?

## Odpowiedź

Jest to koło.

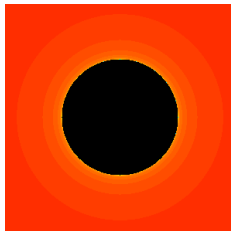
# Przykład 1

## Pytanie

Jak wygląda zbiór punktów  $z$ , dla których  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| \neq \infty$ ,  
jeśli  $f(z) = z^2$  ?

## Odpowiedź

Jest to koło.





## Przykład 2

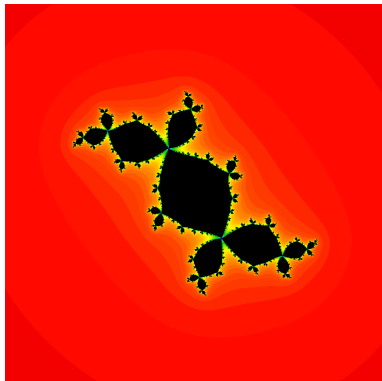
### Pytanie

A co dla  $f(z) = z^2 - 0,123 + 0,745i$  ?

## Przykład 2

### Pytanie

A co dla  $f(z) = z^2 - 0,123 + 0,745i$  ?

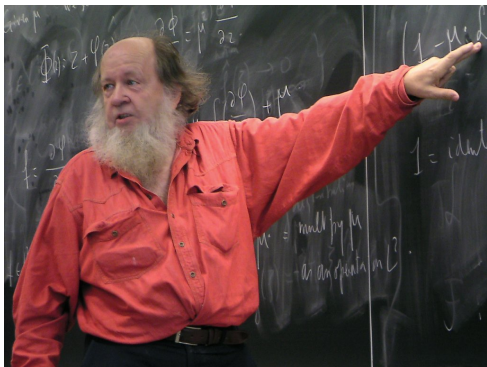


## Odpowiedź

Jest to tzw. **królik Douady'ego**.

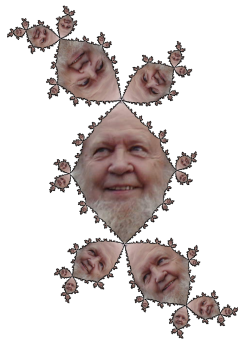
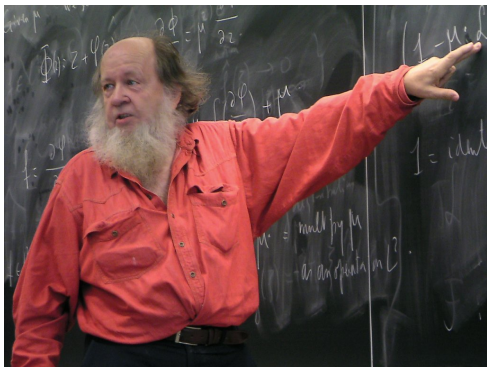
## Odpowiedź

Jest to tzw. **królik Douady'ego**.



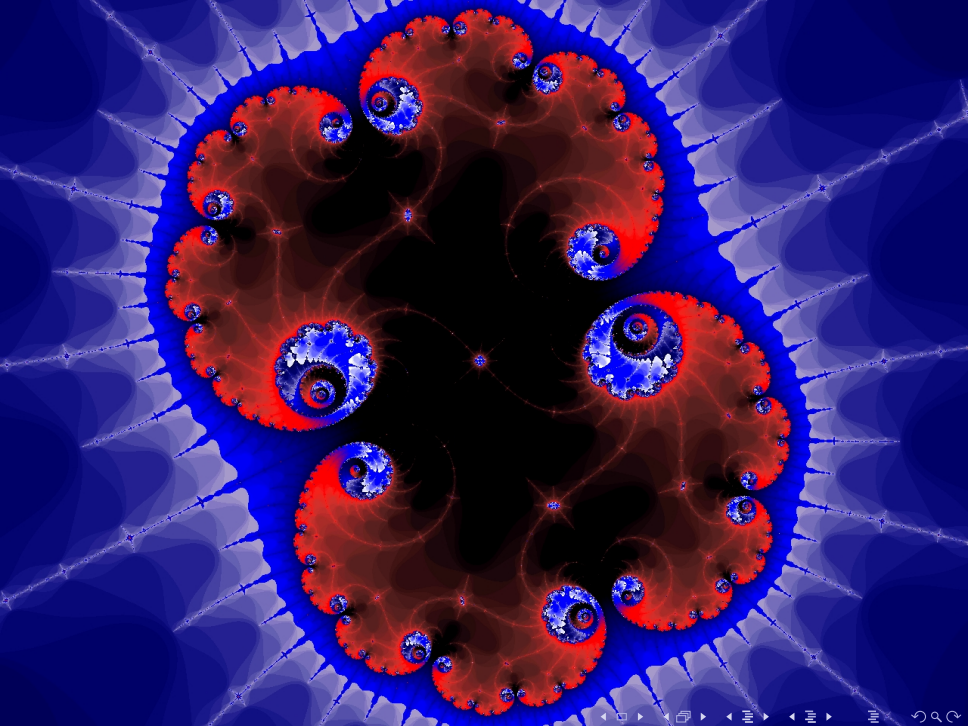
## Odpowiedź

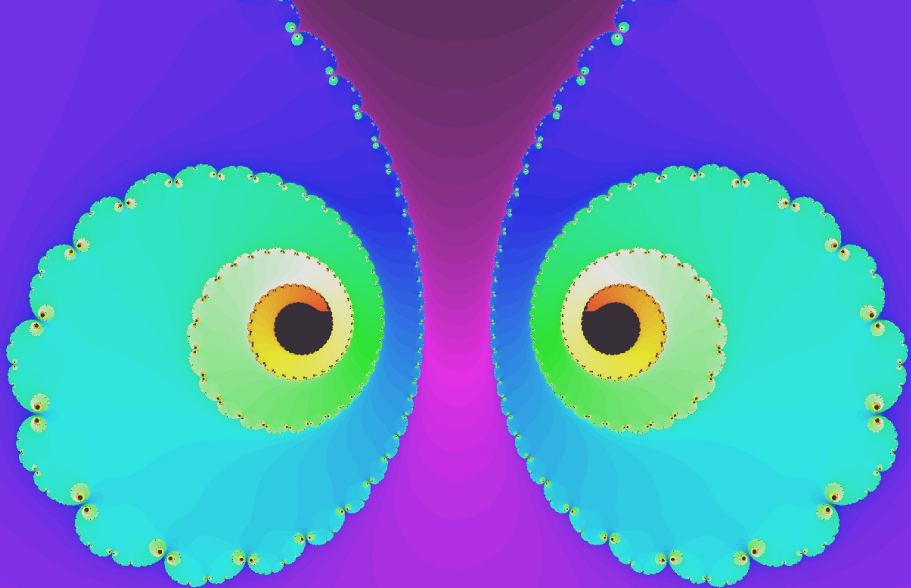
Jest to tzw. **królik Douady'ego**.



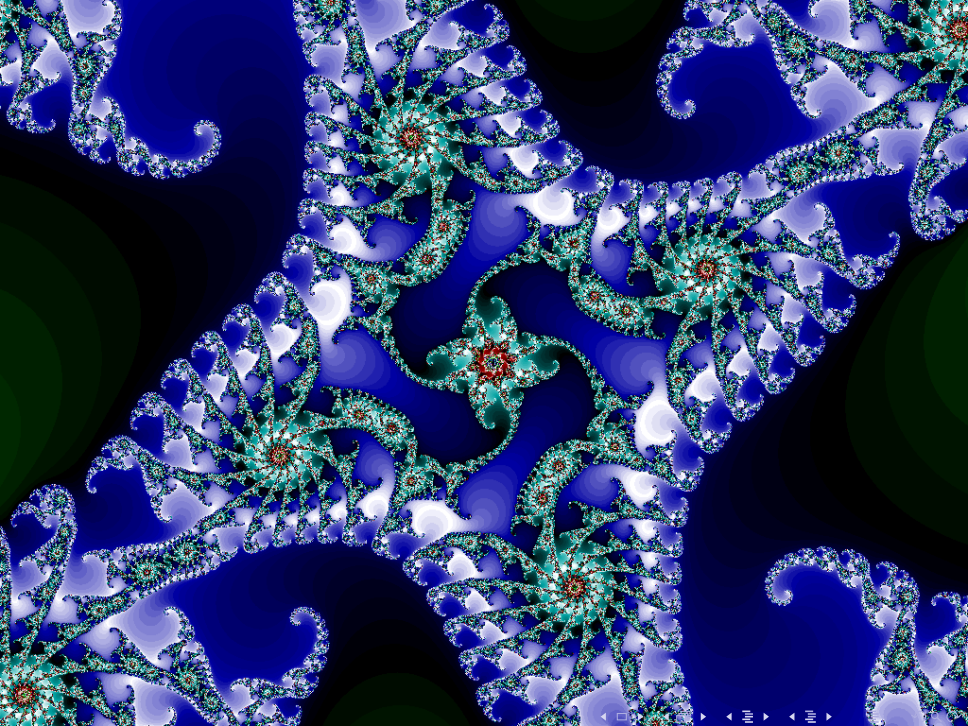
Adrien Douady (1935–2006)

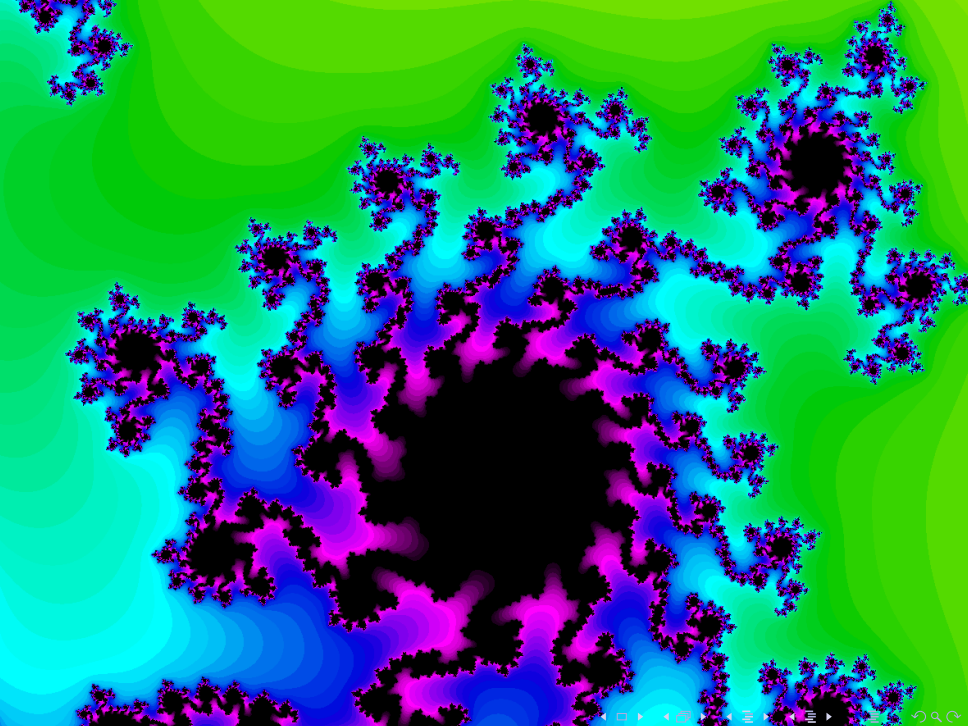
Przy iterowaniu funkcji zespolonych pojawiają się skomplikowane fraktalne zbiory...

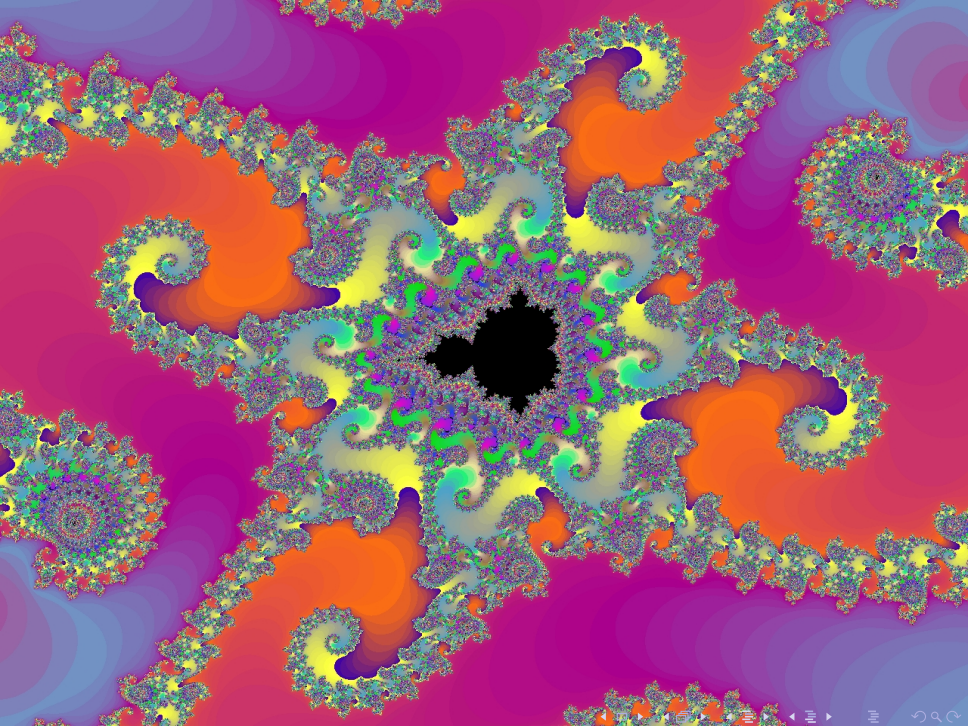






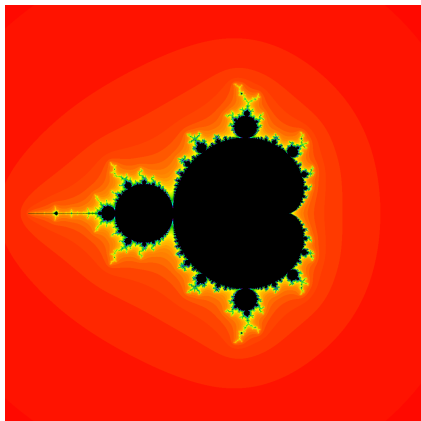




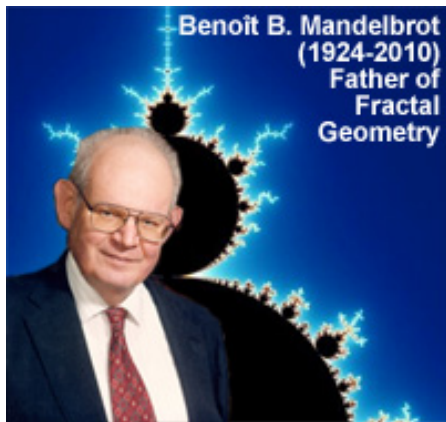
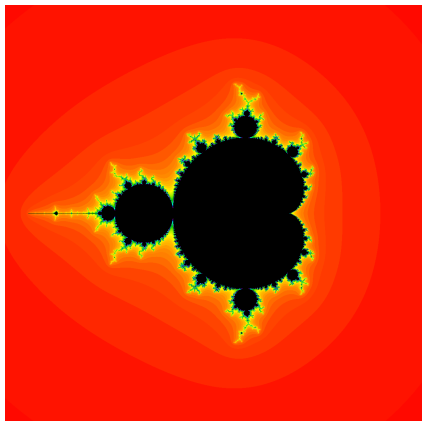


... między innymi sławny [zbiór Mandelbrota](#).

... między innymi sławny [zbiór Mandelbrota](#).



... między innymi sławny [zbiór Mandelbrota](#).

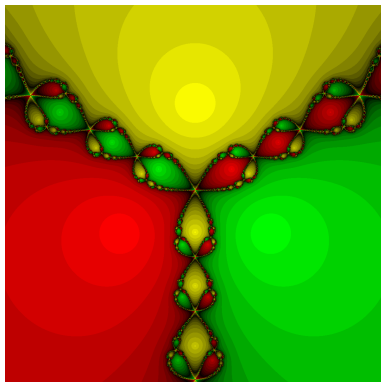


Dynamika holomorficzna to nie tylko ładne obrazki, lecz również poważna matematyka, łącząca w sobie elementy m.in. analizy, topologii i teorii miary. Zajmowali się nią m.in.:

- Artur Avila (medal Fieldsa 2014)
- Lennart Carleson (nagroda Abela 2006)
- Curtis McMullen (medal Fieldsa 1998)
- John Milnor (medal Fieldsa 1962, nagroda Abela 2011)
- Stanislav Smirnov (medal Fieldsa 2010)
- William Thurston (medal Fieldsa 1982)
- Jean-Christophe Yoccoz (medal Fieldsa 1994)

Na wykładzie poznamy:

źródła, ścieki, punkty neutralne, zbiory Julii, składowe Fatou,  
baseny orbit przyciągających i parabolicznych, dyski Siegela,  
pierścienie Hermana, składowe błędzące, zbiór Mandelbrota,  
bifurkacje, włosy Devaney'ego, paradoks wymiaru...







*Zapraszamy!*