Seminarium monograficzne dla studentów matematyki

Teoria ergodyczna

prowadzący: Krzysztof Barański i Anna Zdunik

rok. akad. 2013/14

Zagadnienia badawcze

1. Teoria Ledrappiera–Young, czyli teoria ergodyczna miar niezmienniczych dla dyfeomorfizmów i endomorfizmów na rozmaitościach.

Fundamentalna formuła Pesina dotyczy dyfeomorfizmów rozmaitości. Jej znaczenie polega na tym że wiąże ona entropię miary niezmienniczej absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a (a więc charakteryzację probabilistyczną) z wykładnikami Lapunowa (charakteryzacją geometryczną): entropia jest równa całce z sumy dodatnich wykładników Lapunowa pomnożonych przez wymiar podprzestrzeni związanej z danym wykładnikiem. Inny fundamentalny fakt to nierówność Ruelle'a–Margulisa, ukazująca związek pomiędzy entropią i całką z sumy wykładników Lapunowa. Nie wymaga ona założenia o absolutnej ciągłości miary niezmienniczej.

Teoria F. Ledrapppiera i L. S. Young, sformułowana prawie 30 lat temu, jest ciągle podstawowym i bardzo ważnym narzędziem w badaniu miar niezmienniczych i geometrii zbiorów niezmienniczych (patrz punkt 2 tego zestawienia). Autorom udało się wyznaczyć „defekt" w nierówności Ruelle–Margulisa, który ma jasne geometryczne znaczenie. Jako ważny wniosek otrzymujemy formułę na „lokalny wymiar" miary niezmienniczej. Użyteczność tej formuły prześledzimy w zastosowaniach opisanych w punkcie 2.

Omówimy także wersję tych wyników dla losowych układów dynamicznych złożonych z dyfeomorfizmów i endomorfizmów.

Literatura:

Barreira, L., Pesin, Y., Smooth ergodic theory and nonuniformly hyperbolic dynamics. With an appendix by Omri Sarig. Handbook of dynamical systems, Vol. 1B, 57–263, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

Ledrappier, F., Young, L.-S., *The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*, Ann. of Math. (2) 122 (1985), no. 3, 509–539.

Ledrappier, F., Young, L.-S., *The metric entropy of diffeomorphisms. II. Relations between entropy, exponents and dimension*, Ann. of Math. (2) 122 (1985), no. 3, 540–574.

Ledrappier, F., Young, L.-S., *Dimension formula for random transformations*, Comm. Math. Phys. 117 (1988), no. 4, 529–548.

Ledrappier, F., Young, L.-S., *Entropy formula for random transformations*, Probab. Theory Related Fields 80 (1988), no. 2, 217–240.

2. Zastosowanie teorii Ledrappiera–Young w zagadnieniach związanych z miarami niezmienniczymi dla wykresów nigdzie nieróżniczkowalnych funkcji typu Weierstrassa.

Znanymi przykładami zbiorów niezmienniczych (repellerów) dla układów hiperbolicznych z dwoma różnymi dodatnimi wykładnikami Lapunowa (czyli z różną szybkością rozszerzania w różnych kierunkach niestabilnych) są wykresy nigdzie nieróżniczkowalnych funkcji typu Weierstrassa

$$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n g(b^n x),$$

dla $0 < a < 1 < b$, $ab > 1$ (klasyczny przypadek to $g(x) = \cos 2\pi x$). Można je również traktować jako zbiory graniczne dla pewnych iteracyjnych układów funkcyjnych (IFS) złożonych z dwóch nieliniowych przekształceń płaszczyzny o różnych ujemnych wykładnikach Lapunowa. Problem obliczenia wymiaru Hausdorffa i zbadania własności miar na takich wykresach jest sławną otwartą hipotezą z lat 1980-tych, gdzie znane są tylko częściowe wyniki. Jedną z możliwych strategii zaatakowania tego problemu jest zastosowanie teorii warunkowej entropii i wymiaru z prac Ledrappiera–Young.

Literatura:

Przytycki, F., Urbański, M., *On the Hausdorff dimension of some fractal sets*, Studia Math. 93 (1989), No. 2, 155–186.

Mauldin, R. D., Williams, S. C., *On the Hausdorff dimension of some graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. 298 (1986), No. 2, 793–803.

Ledrappier, F., *On the dimension of some graphs*, Symbolic dynamics and its applications (New Haven, CT, 1991), 285–293, Contemp. Math. 135, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

Solomyak, B., *Measure and dimension for some fractal families*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 124 (1998), No. 3, 531–546.

Hunt, B. R., *The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), No. 3, 791–800.

Tsujii, M., *Fat solenoidal attractors*, Nonlinearity 14 (2001), no. 5, 1011–1027.

Biacino, L., *On the Hausdorff dimension of the graph of a Weierstrass type function*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 56 (2011), no. 4, 7–17.

Barański, K., *On the dimension of graphs of Weierstrass-type functions with rapidly growing frequencies*, Nonlinearity 25 (2012), No. 1, 193–209.

Barański, K., Bárány, B., Romanowska, J., *On the dimension of the graph of the classical Weierstrass function*, preprint arXiv:1309.3759 (2013).

3. Miary samopodobne dla układów IFS z przecięciami: związki z teorią splotów Bernoulliego i hipotezą Furstenberga.

Niech ν_λ będzie rozkładem sumy nieskończenie wielu niezależnych zmiennych losowych, z których każda jest skupiona z prawdopodobieństwem $(1/2, 1/2)$ w punktach $\pm\lambda^n$, gdzie $\lambda \in (0, 1)$ jest ustalonym parametrem. Rozkłady takie nazywamy nieskończonymi splotami Bernoulliego. Badania dotyczące własności tych rozkładów zostały rozpoczęte w latach 1930-tych przez Wintnera i Erdösa, a później kontynuowane przez wielu autorów aż do dzisiaj. Podstawowym problemem jest pytanie, dla jakich $\lambda \in (1/2, 1)$ rozkład ν_λ jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a. Podczas badań nad tym problemem odkryto związki splotów Bernoulliego z analizą harmoniczną, teorią liczb algebraicznych, geometryczną teorią miary i układami dynamicznymi. W latach 1990-tych wyniki Erdösa zostały znacznie wzmocnione przez Solomyaka i Peresa. Kolejne ważne wyniki ukazały się ostatnio w pracach Hochmana i Shmerkina (Hochman udowodnił m.in. związaną z tym problemem hipotezę Furstenberga z lat 1970-tych). Wciąż jednak pozostaje wiele nierozstrzygniętych pytań.

Literatura:

Peres, Y., Solomyak, B., *Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof*, Math. Res. Lett. 3 (1996), no. 2, 231–239.

Solomyak, B., *Measure and dimension for some fractal families*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 124 (1998), no. 3, 531–546.

Peres, Y., Solomyak, B., *Self-similar measures and intersections of Cantor sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), no. 10, 4065–4087.

Hochman, M., Shmerkin, P., *Local entropy averages and projections of fractal measures*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), no. 3, 1001–1059.

Hochman, M., *On self-similar sets with overlaps and inverse theorems for entropy*, preprint arXiv:1212.1873 (2012).

Hochman, M., *Self similar sets, entropy and additive combinatorics*, preprint arXiv:1307.6399 (2013).

Shmerkin, P *On the exceptional set for absolute continuity of Bernoulli convolutions*, preprint arXiv:1303.3992 (2013), ukaże się w Geom. Funct. Anal.

4. Mierzalna dynamika funkcji przestępnych.

Zagadnienia związane z badaniem ergodycznych własności iteracji przestępnych funkcji całkowitych i meromorficznych na płaszczyźnie zespolonej przeżywają od kilkunastu lat okres intensywnego rozwoju rozpoczętego m.in. przez prace McMullena i Karpińskiej dotyczące wymiaru Hausdorffa zbioru Julii dla zespolonych przekształceń eksponencjalnych (tzw. paradoks wymiaru). W ostatnich latach w pracach warszawskiej grupy układów dynamicznych i jej współpracowników uzyskano różne wyniki dotyczące teorii formalizmu termodynamicznego dla funkcji meromorficznych. Spośród wielu ciekawych zagadnień dotyczących tej tematyki, chcielibyśmy zająć się m.in. klasycznych wynikiem Lyubicha z lat 1980-tych dotyczącym zagadnienia ergodyczności i miar niezmienniczych dla przekształcenia eksponencjalnego i jego możliwych uogólnień.

Literatura:

Lyubich, M. Yu., *The measurable dynamics of the exponential*, Sibirsk. Mat. Zh. 28 (1987), no. 5, 111–127.

McMullen, C. T., *Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 300 (1987), 329–342.

Karpińska, B., *Hausdorff dimension of the hairs without endpoints for* $\lambda \exp z$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), no. 11, 1039–1044.

Urbański, M., Zdunik, A., *Geometry and ergodic theory of non-hyperbolic exponential maps*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 3973–3997.

Dobbs, N., Skorulski, B., *Non-existence of absolutely continuous invariant probabilities for exponential maps*, Fund. Math. 198 (2008), no. 3, 283–287.

Kotus, J., Świątek, G., *No finite invariant density for Misiurewicz exponential maps*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346 (2008), no. 9-10, 559–562.

Barański, K., Karpińska, B., Zdunik, A., *Hyperbolic dimension of Julia sets of meromorphic maps with logarithmic tracts*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2009 (2009), no. 4, 615–624.

Mayer, V., Urbański, M., *Thermodynamical formalism and multifractal analysis for meromorphic functions of finite order*, Mem. Amer. Math. Soc. 954 (2010), 1–105.

Barański, K., Karpińska, B., Zdunik, A., *Bowen's formula for meromorphic functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems 32 (2012), no. 4, 1165–1189.

5. Dyfeomorfizmy okręgu – klasyczne i nowe wyniki

Chociaż o dyfeomorfimach okręgu wiele wiadomo, wciąż pojawiają się nowe pytania i ciekawe wyniki. Omówimy kilka nowych prac i otwartych pytań wokół nich. W szczególności, pojawi się pytanie o niezmiennicze dystrybucje (chodzi o dystrybucje Schwartza, czyli uogólnione funkcje), czyli uogólnienie miar niezmienniczych. Zobaczymy dlaczego jest to naturalne zagadnienie. Ponadto zajmiemy się dynamiką nieautonomiczną, tzn. działaniem grup dyfeomorfizmów.

Literatura:

Avila, A., Kocsard A., *Cohomological equations and invariant distributions for minimal circle diffeomorphisms*, Duke Math. J. 158 (2011), no. 3, 501–536.

Navas, A., Triestino, M., *On the invariant distributions of C^2 circle diffeomorphisms of irrational rotation number*, preprint arXiv:1207.1481 (2012).

Deroin, B., *Poisson boundary of discrete groups of diffeomorphisms of the circle*, http://www.math.u-psud.fr/~deroin/, ukaże się w Ergodic Theory Dynam. Systems.