Seminarium monograficzne dla studentów matematyki

Teoria ergodyczna

prowadzący: Krzysztof Barański i Anna Zdunik

rok. akad. 2013/14

Problemy badawcze

1. Pytania dotyczące pracy
Tsujii, M., *Fat solenoidal attractors*, Nonlinearity 14 (2001), no. 5, 1011–1027.

Niech

$$T : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \qquad T(x, y) = (\ell x, \lambda y + f(x))$$

dla $\ell = 2, 3, \ldots$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda\ell > 1$, f klasy C^2 na $\mathbb{S}^1$. Oznaczmy

$$\tau : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \qquad \tau(x) = \ell x \mod \mathbb{Z},$$

$$\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, \ell\},$$

oraz

$$\mathcal{P}(k) = [(k-1)/\ell, k/\ell), \qquad k \in \mathcal{A}.$$

Dla $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiujemy:

$$\mathcal{A}^p = \text{zbiór słów długości } p \text{ nad alfabetem } \mathcal{A},$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}) = \bigcap_{i=0}^{p-1} \tau^{-1}(\mathcal{P}(a_{p-1}) \qquad \text{dla} \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathcal{A}^p \quad \text{lub} \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathcal{A}^\infty,$$

a także

$$S(x, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} f(\tau^{p-i}(\mathbf{a}(x))),$$

gdzie $x \in \mathbb{S}^1$, $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^p$ oraz $\mathbf{a}(x)$ oznacza (dokładnie jeden) punkt $y \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$ dla którego $\tau^p(y) = x$.

Oznaczmy przez $\pi(x)$ element $\mathcal{A}$, dla którego $x \in \mathcal{P}(\pi(x))$. Niech

$$\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty \to \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty, \qquad \Psi(x, \mathbf{a}) = (x, S(x, \mathbf{a})),$$

$$\Theta : \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty \to \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty, \qquad \Theta(x, \mathbf{a}) = (\tau(x), \pi(x)\mathbf{a})).$$

Niech $\mathbf{m}$ znormalizowana miara Lebesgue'a na $\mathbb{S}^1$ i niech ν miara Bernouliego na $\mathcal{A}^\infty$, tj. nieskończony produkt miar probabilistycznych na $\mathcal{A}$ z równymi prawdopodobieństwami $1/\ell, \dots, 1/\ell$. Mamy przemienny diagram

$$T \circ \Psi = \Psi \circ \Theta.$$

Wtedy miara

$$\mu = \Psi(\mathbf{m} \times \nu)$$

jest T-niezmiennicza i ergodyczna i jest miarą SBR dla T.

Pytania:

(a) Czy jeśli μ nie jest singularna, to jest absolutnie ciągła (względem miary Lebesgue'a)?

(b) Wiadomo, że jeśli $f(x) = \varphi(\tau(x)) - \lambda\varphi(x)$ dla pewnej funkcji φ klasy C^2 na $\mathbb{S}^1$, to μ jest singularna (jej nośnik to wykres φ). Czy istnieją inne przykłady funkcji f, dla których μ jest singularna?

(c) W pracy podany jest przykład, że dla $f(x) = \sin(2\pi x)$ dla pewnych ℓ, λ miara μ jest absolutnie ciągła. Jakie są inne konkretne przykłady?

(d) Czy transwersalność każdej pary wykresów $x \mapsto S(x, \mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^\infty$ jest warunkiem typowym w przestrzeni funkcji f klasy C^2 na $\mathbb{S}^1$?

2. Pytanie dotyczące splotów Bernoulliego

Niech ν_λ dla $\lambda \in (1/2, 1)$ będzie rozkładem sumy nieskończenie wielu niezależnych zmiennych losowych, z których każda jest skupiona z prawdopodobieństwem $(1/2, 1/2)$ w punktach $\pm\lambda^n$, gdzie $\lambda \in (0, 1)$ jest ustalonym parametrem (nieskończony splot Bernoulliego). Wiadomo, że ν_λ jest albo absolutnie ciągła albo singularna względem miary Lebesgue'a (patrz np. Peres, Y., Solomyak, B., *Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof*, Math. Res. Lett. 3 (1996), no. 2, 231–239). Niech $\dim_H \nu_\lambda = \inf\{\dim_H X : X \text{ zbiór pełnej miary } \nu_\lambda\}$, gdzie $\dim_H$ oznacza wymiar Hausdorffa.

Pytanie: Czy ν_λ może być singularna i spełniać warunek $\dim_H \nu_\lambda = 1$?

Pytanie to wspomniane jest m.in. w pracy
Ledrappier, F., Xie, J.-S., *Vanishing transverse entropy in smooth ergodic theory*, Ergodic Theory Dynam. Systems 31 (2011), no. 4, 1229–1235.