Analiza Matematyczna
Wydział Nauk Ekonomicznych UW

Poradnik różniczkowania i całkowania

Pochodna

Pochodna opisuje szybkość zmiany wartości funkcji przy zmianie argumentu.

Definicja. Pochodna funkcji f w punkcie x to

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Fakt. *Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Pochodne funkcji elementarnych

$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = a^x,\ a > 0$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Reguły różniczkowania

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- $(cf)'(x) = cf'(x) \quad$ dla $c \in \mathbb{R}$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$
- $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad$ (f^{-1} funkcja odwrotna)

Całka

Definicja. F jest całką nieoznaczoną funkcji f, jeśli $F' = f$. Oznaczamy ją

$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Całki funkcji elementarnych

$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	dla $\alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c$	dla $x > 0$
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	dla $a > 0, a \neq 1$
$\int e^x\, dx = e^x + c$	
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$	
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$	

Reguły całkowania

- $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
- $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$
- $\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$ dla $c \in \mathbb{R}$

Całkowanie przez części

$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx.$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)),$$

gdzie $F(x) = \int f(x)\, dx$.

Definicja. Całka oznaczona funkcji f na przedziale $[a, b]$ to

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

gdzie $F(x) = \int f(x)\, dx$.

Całkowanie przez części dla całki oznaczonej

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx.$$

Całkowanie przez podstawienie dla całki oznaczonej

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy.$$