Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2013/14, semestr zimowy

6 marca 2014 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^e}.$$

3. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{e^{x^2} - 1}.$$

4. Wykazać, że istnieje taka liczba $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, że

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{x}.$$

5. Obliczyć maksymalną objętość walca wpisanego w kulę o promieniu 7.

6. Niech $f : \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt[3]{3}\} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{3 + x^3}.$$

Wyznaczyć rozwinięcie funkcji f w szereg Taylora w punkcie $x_0 = 0$ i obliczyć promień zbieżności tego szeregu.