Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2013/14, semestr zimowy

31 stycznia 2014 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

2. Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(3^n - 2^n + \frac{1}{2^n}\right) x^n.$$

3. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\sin \sqrt{x})^2}{x}.$$

4. Wykazać, że równanie

$$x^5 - 5x^3 + 3 = 0$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste w przedziale $[-3, 2]$.

5. Obliczyć maksymalną objętość stożka obrotowego wpisanego w kulę o promieniu $R > 0$. (Uwaga! Objętość stożka to jedna trzecia iloczynu pola podstawy stożka i jego wysokości).

6. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \left(\sin(x^3)\right)^3.$$

(a) Obliczyć drugą pochodną funkcji f i znaleźć wartość $f''(0)$.

(b) Korzystając z nieparzystości funkcji f wykazać, że wszystkie $2n$-te pochodne $f^{(2n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, są sobie równe.