Egzamin z Analizy Matematycznej II

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2013/14, semestr letni

2 września 2014 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1.

(a) Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx.$$

(b) Obliczyć całkę niewłaściwą
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\, dx.$$

(W punkcie (b) można wykorzystać podstawienie $y = \sqrt{x}$.)

2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x, y) = x^2 - 8x^4 + 2y^2 - y^4.$$
Znaleźć wszystkie punkty $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takie, że $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$ i rozstrzygnąć, czy w tych punktach funkcja f osiąga lokalne ekstremum.

3. Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $g(x, y, z) = x + y + z + xy + yz + zx - z^3$.

(a) Rozstrzygnąć, czy w otoczeniu punktu $(x, z) = (0, 0)$ istnieje funkcja $y = y(x, z)$ klasy C^1 taka, że $g(x, y(x, z), z) = 0$. Jeśli tak, obliczyć $\frac{\partial y}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial y}{\partial z}(0, 0)$.

(b) Podać przykład niezerowego wektora normalnego (prostopadłego) do
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$
w punkcie $(0, 0, 0)$.

4. Znaleźć największą wartość współrzędnej x punktów zbioru
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + 2y + 2z = 0\}.$$

5. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_A xy\, dxdy,$$
gdzie
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$