

# Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2012/13, semestr zimowy

31 stycznia 2013 r.

**UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!**

1. Ktoś pożyczył 100 000 złotych i zobowiązał się zwrócić dług wraz z kapitalizowanymi odsetkami, naliczanymi na zakończenie każdego roku, według rocznej stopy procentowej 10%. Należność ma zostać spłacona w dwu ratach: pierwszej, płatnej po roku od zaciągnięcia pożyczki oraz drugiej – dwa razy większej od pierwszej – po upływie następnego roku. Ile wyniesie, w zaokrągleniu do pełnych groszy, wysokość pierwszej raty?

2. Niech  $a_1 = 1$ , natomiast  $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} - 1$ , dla  $n = 1, 2, \dots$ . Udowodnić, że ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny i wyznaczyć jego granicę.

3. Rozstrzygnąć, dla jakich  $x > 0$  zbieżny jest szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2013n + (-1)^n}.$$

4. (a) Wyznaczyć wzorem funkcję  $x = f^{-1}(y)$  odwrotną do danej:

$$y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

i określić dziedzinę funkcji  $f^{-1}$ .

(b) Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wyznaczyć

$$(f^{-1})'(y_0),$$

gdzie  $y = f(x) = x + x^3$ ,  $y_0 = 10$ .

5. Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + \sin x) - x}.$$

6. Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że dla  $x, y \in (-\infty, -1)$  zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \geq \frac{1}{2 - 2x^2} + \frac{1}{2 - 2y^2}.$$