

# Egzamin z Analizy Matematycznej II

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2011/12, semestr letni

10 września 2012 r.

**UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!**

1. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych  $x, y, z$  zachodzi nierówność

$$\sqrt[6]{x^2y^2z^2} \leq \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}}.$$

2. Znaleźć wszystkie punkty  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , w których funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{y} & \text{dla } y > 0, \\ xy^2 & \text{dla } y \leq 0 \end{cases}$$

ma obie pochodne cząstkowe.

3. Obliczyć  $y'(0)$  oraz  $y''(0)$  dla funkcji uwikłanej  $y = y(x)$  określonej równaniem

$$x(x + y)^2 - x - y + 1 = 0.$$

Znaleźć równanie prostej stycznej do rozmaitości określonej powyższym równaniem, przechodzącej przez punkt  $(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$ .

4. Znaleźć minimum odległości punktów zbioru

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1\}$$

od punktu  $(2, 1, 0)$ .

5. Znaleźć pole powierzchni domkniętego obszaru

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$