Egzamin z Analizy Matematycznej II

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2011/12, semestr letni

22 czerwca 2012 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{2}{9}\ln\sqrt{x} + \frac{6}{9}\ln\sqrt{y} + \frac{10}{9}\ln\sqrt{z} + 2\ln 3 \leq \ln(x + 3y + 5z).$$

2. Znaleźć wszystkie punkty $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, w których funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{x} & \text{dla } x < 0, \\ x^2 - 5y - 6 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

3. Obliczyć $y'(0)$ oraz $y''(0)$ dla funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem

$$xe^y - y + 1 = 0.$$

Znaleźć równanie prostej stycznej do krzywej określonej powyższym równaniem, przechodzącej przez punkt $(e^{-2}, 2)$.

4. Znaleźć minimum odległości punktów powierzchni

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + yz = 2012\}$$

od początku układu współrzędnych.

5. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_T e^x \, dxdy,$$

gdzie $T \subset \mathbb{R}^2$ jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.