ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DO EGZAMINU Z UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Punkty okresowe, zbiory graniczne, sprzężenia

Zadanie 1. Pokazać, że trajektoria (w przód) punktu x w przestrzeni metrycznej X pod działaniem ciągłego przekształcenia $f : X \to X$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy x jest preokresowy.

Zadanie 2. Podać przykład dwóch przekształceń f, g, takich że f^2 jest sprzężone z g^2, a f nie jest sprzężone z g.

Zadanie 3. Które z poniższych przekształceń $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są topologicznie sprzężone? W których przypadkach sprzężenie jest hölderowskie, a w których różniczkowalne?

a. $f(x) = x/2$
b. $f(x) = 2x$
c. $f(x) = -2x$
d. $f(x) = 5x$
e. $f(x) = x^3$.

Zadanie 4. Które z poniższych przekształceń są topologicznie sprzężone w pewnym otoczeniu 0? W których przypadkach to sprzężenie jest hölderowskie, a w których różniczkowalne?

a. $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, b. $f(x) = \sqrt{2}\,x$, c. $f(x) = \sin(x)$,
d. $f(x) = -2x$, e. $f(x) = \pi x$.

Zadanie 5. Niech $0 < c < 1$. Rozważmy przekształcenie f_c określone jako $f_c(x) = \frac{1}{c}x$ dla $x \in [0, c]$ i $f_c(x) = \frac{1}{c-1}x - \frac{1}{c-1}$ dla $x \in [c, 1]$. Pokazać, że wszystkie przekształcenia f_c są topologicznie sprzężone. Czy homeomorfizm sprzęgający jest gładki? lipschitzowski? hölderowski?

Zadanie 6. Pokazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłe i każdy punkt jest okresowy, to f^2 jest identycznością.

Zadanie 7. Pokazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i prawie każdy punkt (względem miary Lebesgue'a) jest okresowy, to f^2 jest identycznością.

Zadanie 8. Niech f będzie przekształceniem pełnego torusa $N = \mathbb{T} \times \mathbb{D}$, gdzie $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ danym przez

$$f(t, z) = (2t \bmod 1, z/4 + e^{2\pi i t}/2).$$

Pokazać, że f ma nieskończenie wiele punktów okresowych.

Zadanie 9 (Uogólnienie zadania 8)**.** Pokazać, że zbiór punktów okresowych dla przekształcenia f z zadania 8 jest gęsty w zbiorze granicznym $\Lambda = \bigcap_{n\geqslant 0} f^n(N)$ (tzw. solenoidzie).

Zadanie 10. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, x + y)$. Pokazać, że istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ ($\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ jest torusem) takie że $\pi \circ F = f \circ \pi$, gdzie π jest naturalnym rzutowaniem $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Wyznaczyć Per$f$ i $\Omega(f)$. (Wsk.: Rozpatrzyć punkty płaszczyzny o współrzędnych wymiernych.)

Przekształcenia okręgu

Zadanie 11. Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $f(t) = 2t \mod 1$. Udowodnić, że przekształcenie f ma punkt o gęstej trajektorii (ogólniej: istnieje gęsty zbiór punktów o gęstej trajektorii). (Wsk.: Użyć kodowania przez rozwinięcia dwójkowe.)

Zadanie 12. Udowodnić, że dla przekształcenia f z zadania 11 punkty okresowe są gęste.

Zadanie 13. Ile różnych orbit o okresie podstawowym 6, a ile o okresie podstawowym 7 ma przekształcenie f z zadania 11?

Zadanie 14. Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $R_\alpha(t) = t + \alpha \mod 1$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ (obrót na okręgu). Pokazać, że jeśli $\alpha \in \mathbb{Q}$, to wszystkie punkty są okresowe (z tym samym okresem), a jeśli $\alpha \notin \mathbb{Q}$, to wszystkie punkty mają gęste trajektorie.

Zadanie 15. Pokazać, że trajektorie punktów pod działaniem przekształcenia R_α z zadania 14 są równo rozłożone w $\mathbb{T}$, tzn. dla każdego $x \in \mathbb{T}$ i $(a, b) \subset [0, 1]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{1 \leqslant k \leqslant n : R_\alpha^k(x) \in (a, b)\}}{n} = b - a.$$

Zadanie 16. Niech a_n będzie pierwszą (od lewej) cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym liczby 2^n. Pokazać że w ciągu a_n wszystkie cyfry pojawią się nieskończenie wiele razy. Co można powiedzieć o częstościach pojawiania się poszczególnych cyfr? (Wsk.: Rozpatrzyć odpowiedni obrót na okręgu.)

Zadanie 17. Udowodnić, że dla przesunięcia $T(x) = x+\alpha$ na torusie $\mathbb{T}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, jeśli $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$, to wszystkie punkty $x \in \mathbb{T}^n$ mają gęste trajektorie.

Zadanie 18. Udowodnić, że jeśli $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ jest homeomorfizmem okręgu zmieniającym orientację, to h ma dwa punkty stałe.

Zadanie 19. Niech $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie homeomorfizmem okręgu zachowującym orientację i niech $\varrho(h)$ będzie liczbą obrotu h. Pokazać, że $\varrho(h) = 0 \mod 1$ wtedy i tylko wtedy gdy h ma punkt stały. Podać przykład takiego homeomorfizmu h, dla którego $\varrho(h) = 0$ oraz zbiór punktów niebłądzących $\Omega(h)$ jest

(a) równy $\mathbb{S}^1$, (b) różny od $\mathbb{S}^1$.

Zadanie 20. Pokazać, że jeśli f i g są homeomorfizmami okręgu zachowującymi orientację oraz f i g są topologicznie sprzężone, to mają tę samą liczbę obrotu.

Zadanie 21. Niech $\mathcal{F}$ będzie przestrzenią homeomorfizmów okręgu zachowujących orientację, z topologią C^0. Pokazać, że liczba obrotu $\varrho(f)$ zależy w sposób ciągły od $f \in \mathcal{F}$.

Gładkie układy dynamiczne

Zadanie 22. Niech X będzie stałym niewymiernym polem wektorowym na $\mathbb{T}^2$ (tzn. polem wyznaczonym przez stałe pole wektorowe (v_1, v_2) na $\mathbb{R}^2$, $\frac{v_1}{v_2} \notin \mathbb{Q}$. Pokazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje pole wektorowe Y, które ma dokładnie n orbit zamkniętych, odległe od X o mniej niż ε w metryce C^1.

Zadanie 23. Niech X pole wektorowe klasy C^1 na zwartej gładkiej rozmaitości M. Udowodnić, że zbiór punktów niebłądzących $\Omega(X)$ dla potoku generowanego przez X jest niepusty, zwarty i w pełni niezmienniczy, Udowodnić, że dla każdego $x \in M$ zbiór ω-graniczny $\omega(x)$ dla potoku generowanego przez X jest niepusty, zwarty, w pełni niezmienniczy i spójny.

Zadanie 24. Pokazać, że zbiór punktów niebłądzących $\Omega(X)$ dla potoku generowanego przez pole wektorowe X klasy C^1 na zwartej rozmaitości M zawiera zbiory ω-graniczne $\omega(x)$ dla każdego $x \in M$.

Zadanie 25. Niech γ będzie orbitą rekurencyjną potoku ϕ_t pola wektorowego X klasy C^1 na zwartej rozmaitości Riemanna M, tzn. dla każdego $p \in \gamma$ istnieje ciąg $t_n \to \infty$, taki że $\phi_{t_n}(p) \to p$). Pokazać, że każdy punkt $p \in \gamma$ jest również rekurencyjny dla dyfeomorfizmu ϕ_1 „po czasie 1", tzn. istnieje ciąg $n_k \to \infty$, $n_k \in \mathbb{N}$, taki że $\phi_{n_k}(p) \to p$.

Zadanie 26. Niech γ będzie izolowaną orbitą zamkniętą pola wektorowego X klasy C^r na dwuwymiarowej zwartej rozmaitości M. Pokazać, że istnieje otoczenie $V \supset \gamma$, takie że dla każdego $p \in \gamma$ albo $\alpha(p) = \gamma$, albo $\omega(p) = \gamma$. (Wsk.: Rozpatrzyć cięcie Poincarégo.)

Zadanie 27. Rozważmy następujące pola wektorowe na płaszczyźnie

$$X(x, y) = (x, y), \qquad Y(x, y) = (x + y, -x + y).$$

Pokazać (wypisując explicite sprzężenie), że potoki pól X, Y są topologicznie sprzężone.

Zadanie 28. Pokazać, że potoki pól liniowych hiperbolicznych X i Y w $\mathbb{R}^n$ są topologicznie sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy wymiar podprzestrzeni stabilnej dla X jest taki sam jak wymiar podprzestrzeni stabilnej dla Y. (Wsk.: Zbudować oddzielnie sprzężenia pomiędzy podprzestrzeniami stabilnymi i niestabilnymi, jak w zadaniu 27).

Zadanie 29. Pokazać, że jeśli pole liniowe X w $\mathbb{R}^n$ nie jest hiperboliczne, to można je zaburzyć zmieniając macierz definiującą pole w ten sposób, aby zmienił się wymiar podprzestrzeni stabilnej i niestabilnej. (Wsk.: Jeśli X nie jest hiperboliczne, to dodając do X operator liniowy $Y(x) = \lambda x$, $\lambda \approx 0$ dostajemy operator hiperboliczny.)

Zadanie 30. Korzystając z twierdzenia Hadamarda-Perrona udowodnić, że globalne rozmaitości stabilna i niestabilna punktu stałego hiperbolicznego są immersyjnymi podrozmaitościami M.

Zadanie 31. Rozpatrzmy pole wektorowe w $\mathbb{R}^2$ zadane przez

$$X(x, y) = 2y, 4x - 4x^3.$$

Sprawdzić, że punkt $(0,0)$ jest hiperbolicznym punktem krytycznym pola X. Globalna rozmaitość stabilna i niestabilna pokrywają się. Jest to podrozmaitość immersyjna, ale nie regularna w $\mathbb{R}^2$. (Wsk: Pole X jest postaci $\left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right)$ dla pewnej funkcji H, więc H jest całką pierwszą.)

Zadanie 32. Niech $p \in M$ będzie hiperbolicznym punktem stałym dyfeomorfizmu $f : M \to M$ gładkiej zwartej rozmaitości M. Załóżmy, że istnieje ciąg punktów okresowych $p_n \to p$, $p_n \neq p$. Pokazać, że wówczas istnieje także $p' \in W^u(p)$, $p' \neq p$ i ciąg punktów q_n, okresowych dla f, taki że $q_n \to p'$.

Zadanie 33. Pokazać, że jeśli $p \in M$ jest hiperbolicznym punktem stałym dla dyfeomerfizmu $f : M \to M$ klasy C^1 zwartej rozmaitości M, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje otoczenie U punktu p, takie że każdy punkt okresowy w $U \setminus \{p\}$ ma okres większy niż n. (Wsk.: Zastosować twierdzenie Grobmana-Hartmana.)

Zadanie 34. Rozważmy przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$\phi(x, y, z) = (ax, ac(y + \varepsilon xz), cz),$$

gdzie $a > 1$, $ac > 1$, $0 < c < 1$, $\varepsilon > 0$. Twierdzenie Grobmana-Hartmana gwarantuje, że w małym otoczeniu zera to przekształcenie jest topologicznie sprzężone ze swoją częścią liniową w punkcie $(0, 0, 0)$, tzn. z

$$A(x, y, z) = (ax, acy, cz).$$

Pokazać, że to sprzężenie w żadnym otoczeniu zera nie jest klasy C^1.

Zadanie 35. Udowodnić, że pole gradientowe $V = \operatorname{grad} f$ klasy C^1 na zwartej rozmaitości M nie ma nietrywialnych orbit zamkniętych (Wsk.: Pokazać, że $\frac{d}{dt} f(\varphi_t(x)) \geqslant 0$, gdzie φ_t potok pola V.)

Zadanie 36. Udowodnić, że jeśli $V = \operatorname{grad} f$ pole gradientowe klasy C^1 na zwartej rozmaitości M, to dla każdego $x \in M$, $\omega(x)$ składa się z punktów krytycznych pola V.

Zadanie 37. Uzasadnić, że pole $X = \operatorname{grad} h$, $h(x, y, z) = -z$ na „postawionym torusie" nie jest polem Morse'a-Smale'a, a na (trochę) pochylonym torusie — jest.

Zadanie 38. Pokazać, że pole wektorowe Morse'a-Smale'a nie ma niestałych całek pierwszych.

Zadanie 39. Niech X pole wektorowe Morse'a-Smale'a klasy C^1 na zwartej rozmaitości M klasy C^1. Udowodnić, że dla każdego $x \in M$ zbiór ω-graniczny $\omega(x)$ jest pewnym elementem krytycznym (punktem krytycznym lub orbitą okresową) pola X.

Zadanie 40. Niech φ_t będzie potokiem pola wektorowego X klasy C^1 na zwartej gładkiej rozmaitości M. Niech $F : M \to M$, $F(x) = \varphi_1(x)$ będzie dyfeomorfizmem „po czasie 1".

(a) Pokazać, że jeśli p jest hiperbolicznym punktem krytycznym pola X, to rozmaitości stabilne (odp. niestabilne) punktu p dla potoku φ_t oraz dyfeomorfizmu F pokrywają się.

(b) Pokazać, że jeśli X jest polem Morse'a-Smale'a bez orbit zamkniętych, to F jest dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a.
(c) Pokazać, że jeśli X jest polem Morse'a-Smale'a i ma orbity zamknięte, to F nie jest dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a.

Miary niezmiennicze i teoria ergodyczna

Zadanie 41. Pokazać, że miara μ jest T-niezmiennicza na X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu$$

dla każdej funkcji $f \in L^1(\mu)$.

Zadanie 42. Niech μ miara probabilistyczna T-niezmiennicza na X. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(a) μ jest ergodyczna,
(b) dla każdej mierzalnej funkcji f, jeśli $f \circ T = f$ μ-p.w., to f =const μ-p.w.,
(c) dla każdej mierzalnej funkcji f, jeśli $f \circ T \leqslant f$ μ-p.w., to f =const μ-p.w.

Zadanie 43. Przekształcenie T zachowujące miarę probabilistyczną μ jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego mierzalnego zbioru B, takiego że $T^{-1}(B) = B$ mamy $\mu(B) = 0$ lub $\mu(B) = 1$. Pokazać, że przekształcenie T zachowujące miarę probabilistyczną μ jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mu(T^{-1}(A) \div A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = 0 \text{ lub } \mu(A) = 1.$$

(Wsk.: Implikacja w jedną stronę jest oczywista. Jeśli A spełnia $\mu(T^{-1}(A) \div A) = 0$, to należy rozważyć zbiór $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A)$.)

Zadanie 44. Niech μ miara probabilistyczna T-niezmiennicza na X. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(a) μ jest ergodyczna
(b) Dla każdego mierzalnego $A \subset X$, jeśli $\mu(A \div T^{-1}(A)) = 0$, to $\mu(A) = 0, 1$.
(c) Dla każdego mierzalnego $A \subset X$, jeśli $\mu(A) > 0$, to $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)) = 1$
(d) Dla każdej funkcji $f \in L^1(\mu)$ zachodzi $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \int_X f d\mu$.
(e) Dla każdej mierzalnej funkcji f, jeśli $f \circ T = f$ μ-p.w., to f =const μ-p.w.
(f) Dla każdej mierzalnej funkcji f, jeśli $f \circ T \leqslant f$ μ-p.w., to f =const μ-p.w.
(g) Dla każdych mierzalnych $A, B \subset X$, jeśli $\mu(A), \mu(B) > 0$, to istnieje $n > 0$ takie, że $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$.
(f) Dla każdych mierzalnych $A, B \subset X$ zachodzi $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.
(h) Dla każdych funkcji $f, g \in L^1(\mu)$ zachodzi $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle U^k f, g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle$, gdzie $U : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$, $Uf = f \circ T$.
(i) (Przy założeniu, że X zwarta, T ciągłe) μ jest punktem ekstremalnym zbioru wszystkich miar probabilistycznych T-niezmienniczych na X.

Zadanie 45 (Lemat Kaca, czyli szacowanie średniego czasu powrotu punktu do zbioru)**.** Niech A będzie mierzalnym podzbiorem przestrzeni probabilistycznej (X,μ) o dodatniej mierze i niech $T : X \to X$ będzie ergodycznym przekształceniem zachowującym miarę μ. Dla $x \in A$ określamy funkcję τ_A (czas powrotu do A):

$$\tau_A(x) = \inf\{n > 0 : T^n(x) \in A\}.$$

Z twierdzenia Poincarégo o powracaniu wynika, że funkcja τ_A jest prawie wszędzie dobrze określona, można więc policzyć jej całkę. Pokazać, że

$$\int_A \tau_A(x)d\mu = 1.$$

(Wsk.: To zadanie jest łatwiejsze, jeśli dodatkowo założymy, że T jest automorfizmem, tzn. T jest odwracalne i T^{-1} jest mierzalne. Można na początek ograniczyć się do tego przypadku. Należy zwrócić uwagę, że dla automorfizmów mamy $\mu(A) = \mu(T(A)) = \mu(T^{-1}(A))$.)

Zadanie 46. Niech $\mathcal{G}$ będzie następującym σ-ciałem:

$$\mathcal{G} = \{A : \mu(A \div T^{-1}(A)) = 0\}.$$

Pokazać, że każda funkcja ψ mierzalna względem tego σ-ciała jest (prawie wszędzie) T-niezmiennicza, tzn. $\psi \circ T = \psi$ prawie wszędzie. (Wsk.: Jeśli ψ nie spełnia tego warunku, to istnieje a, takie że zbiór $D_A = \{x : \psi(x) < a, \psi(T(x)) > a\}$ (lub zbiór zdefiniowany tak samo, ale przez przeciwne nierówności) ma dodatnią miarę (dlaczego?). Popatrzyć na przecięcie $D_A \cap T^{-1}(D_a)$.)

Zadanie 47. Pokazać, że jeśli μ_1 miara ergodyczna T-niezmiennicza i μ_2 miara T-niezmiennicza absolutnie ciągła względem μ_1, to $\mu_1 = \mu_2$.

Zadanie 48. Pokazać, że jeśli μ_1, μ_2 miary ergodyczne T-niezmiennicze, to $\mu_1 = \mu_2$ lub μ_1 i μ_2 są wzajemnie singularne.

Zadanie 49. Pokazać, że przekształcenie $T : [0,1] \to [0,1]$ określone wzorem $T(x) = 2x \mod 1$ zachowuje miarę Lebesgue'a i jest ergodyczne. (Wsk.: skorzystać z zadania 44 i sprawdzić jedną z wymienionych tam własności.)

Zadanie 50. Pokazać, że przekształcenie $T : [-1,1] \to [-1,1]$ określone wzorem

$$T(x) = 2x^2 - 1$$

zachowuje miarą równoważną mierze Lebesgue'a. Znaleźć jej gęstość.

Zadanie 51. Pokazać, że jeśli $f(z) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$, gdzie $x \in (0,1]$ (tzn. f jest tzw. przekształceniem Gaussa), to f zachowuje miarę z gęstością $\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x+1}$.

Zadanie 52. Pokazać, że jeśli $f(z) = z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$, gdzie $z, a_k \in \mathbb{C}$, $|a_k| < 1$ (tzn. f jest tzw. produktem Blaschke), to f zachowuje miarę Lebesgue'a na okręgu jednostkowym.

Zadanie 53. Pokazać, że jeśli $T(x) = Ax$ jest algebraicznym automorfizmem torusa $\mathbb{T}^n$ (tzn. A jest macierzą całkowitoliczbową oraz $\det A = \pm 1$), to f zachowuje miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}^n$.

Zadanie 54. Udowodnić, że przesunięcie $T(x) = x + \alpha$ na torusie $\mathbb{T}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy, gdy $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$.

Zadanie 55. Udowodnić, że algebraiczny automorfizm torusa $\mathbb{T}^n$, $T(x) = Ax$ jest ergodyczny wtedy i tylko wtedy, gdy A nie ma wartości własnych, które są pierwiastkami z 1.

Zadanie 56. Udowodnić, że automorfizm Bernoulliego jest ergodyczny i jest mieszaniem.

Zadanie 57. Udowodnić, że miara niezmiennicza μ dla przekształcenia T na przestrzeni topologicznej X jest skupiona na zbiorze punktów niebłądzących $\Omega(T)$ (tzn. $\mu(\Omega(T)) = \mu(X)$).