

# Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej

## Uniwersytet Warszawski Wydział Nauk Ekonomicznych

7 września 2010 r.

**UWAGA:** Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 10 pkt. Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Obliczyć granicę ciągu  $a_n$ , gdzie

$$a_n = \frac{1}{5^1} + \frac{3}{5^2} + \frac{5}{5^3} + \cdots + \frac{2n-1}{5^n}.$$

2. Obliczyć lewostronną granicę funkcji

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{1 - \cos x}).$$

3. Znaleźć punkty  $P$  należące do zbioru

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 5\},$$

dla których odległość od punktu  $Q = (0, -4)$  jest najmniejsza.

4. Niech

$$f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2 \quad \text{dla } (x, y) \in K,$$

gdzie

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 5, |y| \leq 1\}.$$

Zbadać, ile maksimów lokalnych ma funkcja  $f$  we wnętrzu zbioru  $K$ . Sprawdzić, czy któreś z tych maksimów lokalnych jest maksimum funkcji  $f$  na całym zbiorze  $K$ .

5. Prostokątny ekran w kinie ma wysokość 8 m i jest zawieszony na pionowej ścianie, tak że jego górna krawędź znajduje się na wysokości 12 m nad poziomą podłogą. W jakiej odległości od ściany z ekranem powinien siedzieć widz, aby oglądać ekran pod jak największym kątem (mierzonym w pionie, pomiędzy dolną i górną krawędzią ekranu)? Zakładamy, że widz siedzi w środku rzędu, a jego oczy znajdują się na wysokości 1,5 m nad podłogą.

6. Obliczyć pole zbioru

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y - 6 \geq 0, x^2 + 2y \leq 0, y + 6 \geq 0\}.$$