

Egzamin z Analizy Matematycznej

Wydział Nauk Ekonomicznych

12 czerwca 2009 r.

UWAGA: Każde zadanie piszemy na oddzielnych kartkach, każda kartka ma być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Za egzamin można otrzymać maksymalnie 60 pkt. Czas egzaminu: 3,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (7 pkt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

2. (8 pkt.) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^4 \cdot (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n).$$

3. (7 pkt.) Obliczyć granicę funkcji

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x})^{e^x}.$$

4. (8 pkt.) Niech

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Obliczyć $(f^{-1})'(1)$, gdzie f^{-1} oznacza funkcję odwrotną.

5. (8 pkt.) Kocioł o pojemności 1000 litrów ma kształt walca zamkniętego ze wszystkich stron. Jakie powinny być wymiary tego kotła, aby do jego wykonania zużyć jak najmniej blachy? (Grubość blachy pomijamy.)

6. (7 pkt.) Znaleźć wszystkie lokalne maksima i minima funkcji

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 5y + 7.$$

7. (8 pkt.) Wyznaczyć najmniejszą wartość współrzędnej z punktów zbioru

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, x + y + z = 1, z > 0\}.$$

8. (7 pkt.) Stosując podstawienie $y = e^x$, obliczyć

$$\int e^{x+e^x} dx.$$