

Egzamin Poprawkowy z Analizy Matematycznej

3 września 2008 r.

UWAGA: Każde zadanie piszemy na oddzielnej kartce; każda kartka ma być podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 10 pkt. Czas egzaminu: 3 godziny. Nie wolno używać kalkulatorów! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Ktoś zadłużył się u lichwiarza na 100 000 złotych i zobowiązał się oddać te pieniądze wraz z kapitalizowanymi odsetkami, naliczanymi na zakończenie każdego roku według rocznej stopy 100%. Dług ma być oddany w trzech ratach: pierwsza płatna po roku od zaciągnięcia pożyczki, druga – dwa razy większa niż pierwsza – płatna po drugim roku, a po kolejnym roku rata trzecia (ostatnia), mająca stanowić trzykrotność pierwszej raty. Ile wyniesie wysokość pierwszej raty?

2. Obliczyć granicę

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2k)^3}{k^4}.$$

3. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \right).$$

4. Zbiór A jest zdefiniowany następująco:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 2\}.$$

Czy zbiór ten jest:

a) ograniczony, b) otwarty, c) spójny, d) wypukły, e) zwarty?

Wyznaczyć kres dolny odległości punktów zbioru A od punktu P o współrzędnych $(2\sqrt{2}, 0)$.

5. Dwaj kierowcy, H oraz K, rozpoczęli wyścig równocześnie z tej samej linii startowej i linię mety także minęli jednocześnie. Wykazać, że była w trakcie wyścigu – tzn. już *po starcie* – taka chwila, w której ich bolidy miały tę samą prędkość.

6. Sesja giełdowa trwała sześć godzin. Przez pierwsze dwie godziny kurs akcji pewnej spółki umacniał się jednostajnie (w stałym tempie), od ceny początkowej 12 zł za akcję do ceny 14 zł za akcję. Przez następne cztery godziny kurs jednostajnie spadał, do ceny końcowej 10 zł za akcję. Przed otwarciem sesji Inwestor posiadał 10 000 akcji tej spółki oraz 100 000 zł. Przez całą fazę wzrostu Inwestor dokupywał nowe akcje, dokonując transakcji w sposób ciągły, ze stałą średnią intensywnością 1 akcji na sekundę. W fazie spadku Inwestor dokładnie w taki sam sposób swoje akcje wyprzedawał. Jaka jest po tej sesji wartość całości kapitału Inwestora (tzn. kwota posiadanej gotówki plus wartość pozostałych akcji obliczona po cenie na koniec sesji)?