

# Egzamin z Analizy Matematycznej

13 czerwca 2008 r.

**UWAGA:** Każde zadanie piszemy na oddzielnych kartkach, każda kartka ma być podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 10 pkt. Czas egzaminu: 3,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Ktoś pożyczył 100 000 złotych i zobowiązał się oddać ten dług wraz z kapitalizowanymi odsetkami, naliczanymi według rocznej stopy 10%, na zakończenie każdego roku. Dług ma być oddany w dwu ratach, pierwsza płatna po dwóch latach od zaciągnięcia pożyczki, zaś druga – dwa razy większa niż pierwsza – po upływie następnych trzech lat. Ile wynosi każda rata?

2. Pan A gra z panem B w następującą grę: jeśli pan A ma w danej chwili przy sobie  $x$  złotych, to pan B daje panu A drugie  $x$  złotych, a w zamian pan A daje panu B połowę z  $x^2$  złotych (panowie rozliczają się z matematyczną dokładnością). Ile pieniędzy zyska lub straci pan A po bardzo wielu (w granicy – „nieskończenie wielu”) grach, jeśli na początku ma tylko jedną złotówkę?

3. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - xe^{1/x}).$$

4. Jaka największa pojemność może mieć zbiornik w kształcie zamkniętego ze wszystkich stron walca, wykonany z 1 m<sup>2</sup> blachy?

5. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 - 2xy + |xy|.$$

6. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f(x, y, z) = 2x - y - z$  na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

7. Niech  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie. Zakładamy, że istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

Dla dodatnich argumentów  $x$  określamy funkcję  $g(x)$  wzorem  $g(x) = f(x) - f(x + 1)$ .

Znaleźć  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ , uzasadniając otrzymany wynik.

8. Kurs akcji pewnej spółki umacnia się od początku do końca sześciogodzinnej sesji w jednostajnym tempie, od ceny początkowej 12 zł za akcję do ceny końcowej 13,5 zł za akcję. Przed otwarciem sesji Inwestor posiada 10 000 akcji tej spółki i ponadto dysponuje sumą 100 000 zł na dokonywanie transakcji.

Początkowo Inwestor czeka na rozwój sytuacji. Po pierwszych 60 minutach wzrostów zaczyna kupować nowe akcje, w sposób ciągły, ze stałą średnią intensywnością 1 akcji na sekundę. Po dwu godzinach kupowania Inwestor przerywa transakcje.

Jaka jest po tej sesji wartość całości kapitału Inwestora (tzn. suma pozostałych pieniędzy plus wartość jego akcji obliczona po cenie na koniec sesji)? Jaki zysk przyniosła mu ta sesja?