Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x_1x_2 + ax_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + 2 = 0\}$ jest afinicznie równoważny z paraboloidą hiperboliczną?

Zaczynamy od wygenerowania kwadratu:

$$x_1 := x + y, x_2 := x - y, x_3 := z$$

Wtedy:

$$x_1x_2 + ax_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + 2 = \quad (1)$$
$$(x-y)(x+y) + a(x+y)z + (x-y)z + (x+y) + 2 = \quad (2)$$
$$x^2 - y^2 + (a+1)xz + (a-1)yz + x + y + 2 = \quad (3)$$
$$(x + \frac{a+1}{2}z + \frac{1}{2})^2 - (\frac{a+1}{2}z)^2 - \frac{1}{4} - \frac{a+1}{2}z - y^2 + (a-1)yz + y + 2 = \quad (4)$$
$$(x + \frac{a+1}{2}z + \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{a-1}{2}z - \frac{1}{2})^2 + (\frac{a-1}{2}z)^2 + \frac{a-1}{2}z + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - (\frac{a+1}{2}z)^2 - \frac{a+1}{2}z + 2 = \quad (5)$$
$$(x + \frac{a+1}{2}z + \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{a-1}{2}z - \frac{1}{2})^2 - az^2 - z + 2 \quad (6)$$

W (4) zwijamy względem x, w (5) względem y. Teraz jeśli $a \neq 0$ to wyraźnie dostajemy (po odpowiednim podstawieniu) którąś z powierzchni typu $x^2 - y^2 \pm z^2 \pm 1 = 0$ lub (uwaga, dla jakich a?) typu $x^2 - y^2 \pm z^2 = 0$. Natomiast jeśli $a = 0$ to znika ostatni kwadrat i mamy powerzchnię typu $x^2 - y^2 + z = 0$. Odpowiedź: dla $a = 0$.