Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Marcin Hauzer
Nr albumu: 189257

Działanie $SL(3)$ na przestrzeni moduli snopów semistabilnych na $\mathbb{P}^2$

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dr Adriana Langera
Instytut Matematyki UW
Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniweresytetu Warszawskiego

Maj 2004

Pracę przedkładam do oceny

Data | Podpis autora pracy:

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data | Podpis kierującego pracą:

Streszczenie

Badamy stabilność punktów przestrzeni moduli $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ snopów semistabilnych na $\mathbb{P}^2$ rangi r z klasami Cherna c_1 i c_2 względem działania grupy automorfizmów płaszczyzny. Podajemy kryterium na niestabilność $[F]$ w terminach $h^0(F(-1)_{|L})$ i $h^1(F_{|L})$. Wykorzystując je wskazujemy przykłady stabilnych wiązek wektorowych, które odpowiadają punktom niestabilnym ze względu na działanie $SL(3)$ na przestrzeni moduli. Konstruujemy morfizm z $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, -1, n)$ do $\mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$ przyporządkowując każdemu snopowi jego krzywą prostych skoku drugiego typu. Dzięki niemu dowodzimy, że zbiór punktów stabilnych $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, -1, n)^s$ jest niepusty.

Słowa kluczowe

działanie grupy na rozmaitości, przestrzeń moduli, snopy semistabilne, prosta skoku, prosta skoku drugiego typu, monada

Klasyfikacja tematyczna

14J60, 14D20, 14F05, 14L30 (według MSC 2000)

Spis treści

Wprowadzenie

Niech V będzie 3−wymiarową przestrzenią wektorową nad algebraicznie domkniętym ciałem k charakterystyki 0. Niech $PGL(V)$ będzie grupą automorfizmów płaszczyźny rzutowej $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$. Działanie $PGL(V)$ na $\mathbb{P}^2$ indukuje działanie $PGL(V)$ na przestrzeni moduli $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ snopów semistabilnych rangi r z klasami Cherna c_1 i c_2. Naturalnym zagadnieniem w geometrycznej teorii niezmienników jest badanie, które snopy odpowiadają punktom semistabilnym lub stabilnym tego działania. Aby odpowiedzieć na to pytanie, działanie grupy $PGL(V)$ rozszerzymy do działania $SL(V)$. Karnik w swojej pracy [Ka] badał ten problem w przypadku $c_1 = 0$. Przy takim założeniu, każdemu snopowi semistabilnemu E rangi 2 można przyporządkować krzywą prostych skoku. Jest to krzywa w $(\mathbb{P}^2)^*$ stopnia $c_2(E)$. Przyporządkowanie to daje tzw. morfizm Bartha z przestrzeni moduli $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, 0, c_2)$ do $\mathbb{P}^{\binom{c_2+2}{2}-1}$. Karnik użył tego morfizmu by pokazać, że zbiór punktów stabilnych działania $SL(V)$ na $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, 0, c_2)$ jest niepusty względem pewnej linearyzacji. Podał też kryterium na to kiedy punkt $[E] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, 0, c_2)$, odpowiadający snopowi E, jest niestabilny. W drugiej części swej pracy Karnik zajął się przestrzeniami moduli dla snopów wyższej rangi pozostając jednak przy założeniu $c_1 = 0$. Znalazł podobne kryterium na niestabilność i próbował udowodnić stabilność ogólnego punktu. Dowód ten okazał się jednak błędny.

W niniejszej pracy pozbywamy się założenia $c_1 = 0$. Dla $r = 2$ pozostaje do rozpatrzenia przypadek $c_1 = -1$. W tej sytuacji morfizm Bartha zastępujemy morfizmem Hulka, który przyporządkowuje snopowi jego krzywą prostych skoku drugiego typu. Otrzymujemy twierdzenie analogiczne do wyniku Karnika:

Twierdzenie 1 *Niech F będzie stabilną wiązką wektorowąrangi 2 z klasami Cherna $c_1(F) = -1$ i $c_2(F) = n$, gdzie $n \geqslant 2$. Załóżmy, że istnieje prosta $L \subset \mathbb{P}^2$ taka, że $F_{|L} = \mathcal{O}_L(d) \oplus \mathcal{O}_L(-d-1)$, gdzie $d > \frac{2(n-1)}{3}$. Wtedy $[F] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, -1, n)$, odpowiadający wiązce F, jest punktem niestabilnym ze względu na odpowiednio zlinearyzowane działanie $SL(V)$ na $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, -1, n)$. Ponadto, jeśli $n \geqslant 3$ to zbiór punktów stabilnych $(\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, -1, n))^s$ tego działania jest otwarty i niepusty.*

Także dla $r \geqslant 2$ założenie $c_1 = 0$ okazało się niepotrzebne, by znaleźć kryterium na niestabilność. Ustalmy $r \geqslant 2$ oraz c_1, c_2 takie, że $-r < c_1 \leqslant 0$. Niech $n = c_2 - \frac{1}{2}c_1(c_1 + 1)$. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2 *Niech F będzie semistabilnym snopem rangi r z klasami Cherna $c_1(F) = c_1$ i $c_2(F) = c_2$. Jeżeli istnieje prosta $L \subset \mathbb{P}^2$ taka, że*

$$(r + c_1)\, h^0 \left(F\,(-1)_{|L}\right) - c_1 h^1 \left(F_{|L}\right) > \frac{2}{3} \left(rn + 2c_1^2 + 2rc_1\right), \tag{1}$$

to punkt $[F] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$, odpowiadający snopowi F, jest punktem niestabilnym ze względu na odpowiednio zlinearyzowne działanie $SL(V)$ na $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$.

Niestety, pokazanie, że ogólny punkt tego działania jest stabilny nie powiodło się. Pozostaje jednak nadzieja, że dalsza analiza tego problemu doprowadzi do jego rozwiązania. Plan pracy wygląda następująco:

W rozdziale 1 gromadzimy podstawowe informacje o snopach semistabilnych i o ich przestrzeniach moduli. Wprowadzamy także pojęcia z geometrycznej teorii niezmienników.

Rozdział 2 poświęcony jest konstrukcji morfizmu Hulka z $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ do przestrzeni $\mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$ parametryzującej krzywe stopnia $2(n-1)$ w $(\mathbb{P}^2)^*$. Morfizm Hulka polega na tym, że snopowi semistabilnemu przyporządkowuje się pewne wyróżnione proste, nazywane prostymi skoku drugiego typu. Punkty w $(\mathbb{P}^2)^*$, odpowiadające tym prostym, tworzą krzywą stopnia $2(n-1)$, która jest obrazem naszego snopa.

W rozdziale 3 opisujemy wiązki Hulsbergena, dla których łatwo jest wypisać wzór na krzywą prostych skoku drugiego typu. Dostarczają one nam przykładów wiązek, których krzywe prostych skoku drugiego typu mają punkt dowolnej krotności $\leqslant 2(n-1)$. Możemy też znaleźć wśród nich takie wiązki, dla których zbiór punktów osobliwych krzywej prostych skoku drugiego typu stanowi $\binom{n}{2}$ punktów krotności 2, będących pętlami.

Morfizm Hulka wykorzystujemy w rozdziale 4 do porównania stabilności punktów $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ oraz $\mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$ względem działania grupy $SL(V)$. Podajemy kryterium na stabilność i niestabilność punktu odpowiadającemu krzywej stopnia k w terminach krotności punktów do niej należących. Dowodzimy, że $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)^s$ jest niepusty.

W rozdziale 5 badamy stabilność punktów $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r,c_1,c_2)$ dla $r \geqslant 2$ wykorzystując konstrukcję przestrzeni moduli jako ilorazu przestrzeni monad przez odpowiednią grupę. Dla snopa F takiego, że $[F] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r,c_1,c_2)$ znajdujemy kryterium wystarczające na niestabilność względem działania $SL(V)$ z odpowiednią linearyzacją. Konstruujemy przykłady wiązek wektorowych, które na mocy tego kryterium są $SL(V)-$niestabilne. Opisujemy też błędy, które zrobił Karnik w [Ka] dowodząc stabilności ogólnego punktu $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r,c_1,c_2)$.

Podziękowania: Chciałbym podziękować mojemu promotorowi dr Adrianowi Langerowi za możliwość częstych spotkań i dyskusji, za wyrozumiałość i wszelką pomoc. Dziękuję moim rodzicom za wsparcie w czasie całego okresu studiów. Dziękuję mojej narzeczonej za dodawanie otuchy w chwilach zniechęcenia.

Oznaczenia

Wszystkie występujące w pracy rozmaitości i schematy są określone nad algebraicznie domkniętym ciałem k charakterystyki 0. Będziemy także utożsamiać ze sobą wiązki wektorowe i odpowiadające im snopy lokalnie wolne. W całej pracy będziemy stosować następujące oznaczenia:

- V trójwymiarowa przestrzeń wektorowa
- $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ jest płaszczyzną rzutową parametryzującą dwuwymiarowe podprzestrzenie liniowe w V
- Przez L oznaczamy prostą w $\mathbb{P}^2$, a przez l odpowiadający jej punkt w $(\mathbb{P}^2)^*$.
- $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ oznacza przestrzeń moduli klas $\mathcal{S}$-równoważności snopów semistabilnych rangi r na $\mathbb{P}^2$ z klasami Cherna c_1 i c_2
- $\mathcal{M}^{\mathrm{lf}}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$, $\mathcal{M}^{\mathrm{slf}}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ oznaczają analogiczne przestrzenie moduli dla odpowiednio semistabilnych i stabilnych wiązek wektorowych (snopów lokalnie wolnych)
- Jeżeli E jest semistabilnym snopem rangi r z klasami Cherna c_1 i c_2 to przez $[E] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ oznaczamy odpowiadający mu punkt w przestrzeni moduli.
- G_m oznacza grupę multiplikatywną ciała k

Rozdział 1

Podstawowe fakty i definicje

Na początek zgromadzimy kilka potrzebnych informacji na temat snopów na $\mathbb{P}^2$. Bazujemy głównie na książce Le Potier [LP1].

Definicja 1.1 *Niech E będzie dowolnym snopem koherentnym na $\mathbb{P}^2$. Snop $E^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$ nazywamy* snopem dualnym *do E, a snop $E^{**} = (E^*)^*$ nazywamy jego* refleksywizacją.

Przypomnijmy, że refleksyfizacja snopa koherentnego na $\mathbb{P}^2$ jest snopem lokalnie wolnym.

Definicja 1.2 *Snop F rangi r nazywamy unormowanym, jeśli $-r < c_1(F) \leqslant 0$.*

Dla każdego snopa F istnieje takie k, że $F(k)$ jest unormowany. Nasz problem możemy zatem zredukować do badania przestrzeni moduli snopów unormowanych.

Przez $\chi(\mathbb{P}^2, E) = h^0(E) - h^1(E) + h^2(E)$ oznaczamy *charakterystykę Eulera-Poincaré* snopa E. Twierdzenie Riemanna-Rocha na $\mathbb{P}^2$ mówi nam, że dla snopa rangi r zachodzi:

$$\chi(\mathbb{P}^2, E) = r + \frac{1}{2}c_1(E)\left(c_1(E) + 3\right) - c_2(E).$$

Definicja 1.3 *Niech E będzie snopem koherentnym rangi r na $\mathbb{P}^2$* . Wielomianem Hilberta *snopa E nazywamy taki wielomian P_E, że dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ zachodzi $P_E(m) = \chi(\mathbb{P}^2, E(m))$. Wielomian $p_E = P_E/r$ nazywamy* zredukowanym wielomianem Hilberta.

Wielomian Hilberta istnieje dla dowolnego E. Rozważmy porządek leksykograficzny na wielomianach.

Definicja 1.4 *Snop koherentny E rangi $r > 0$ na $\mathbb{P}^2$ nazywamy* semistabilnym *(odpowiednio* stabilnym*), jeżeli jest beztorsyjny oraz dla każdego koherentnego podsnopa $E' \subset E$ rangi $0 < r' < r$ spełniony jest warunek $p_{E'} \leqslant p_E$ (odpowiednio $p_{E'} < p_E$).*

W literaturze często powyższa stabilność(semistabilność) nosi nazwę stabilności(semistabilności) w sensie Giesekera. Jeżeli F i G są snopami semistabilnymi takimi, że $p_F > p_G$ to na mocy stwierdzenia 1.2.7 w [HL] mamy $\mathcal{H}om(F, G) = 0$. Na $\mathbb{P}^2$ możemy zredukowany wielomian Hilberta przedstawić w postaci

$$p_E(m) = \frac{1}{2}m^2 + \left(\frac{3}{2} + \mu\left(E\right)\right)m + \frac{\chi\left(\mathbb{P}^2, E\right)}{r},$$

gdzie $\mu(E) = \frac{c_1(E)}{r}$ jest *nachyleniem* snopa E. Jeżeli w powyższej definicji zastąpimy nierówność $p_{E'} \leqslant p_E$ przez $\mu(E') \leqslant \mu(E)$, to taki snop E nazywamy *μ-semistabilnym.* Analogicznie dostajemy definicję snopa *μ-stabilnego.* Łatwo można sprawdzić następujące implikacje:

$$\mu\text{-stabilny} \Rightarrow \text{stabilny} \Rightarrow \text{semistabilny} \Rightarrow \mu\text{-semistabilny}$$

W tym miejscu odnotujmy następujący fakt: jeżeli E jest μ-semistabilnym snopem rangi 2 z pierwszą klasą Cherna $c_1(E) = -1$, to jest on μ-stabilny; zatem wszystkie powyższe implikacje są równoważnościami. Semistabilność snopa narzuca duże ograniczenia na wymiary jego grup kohomologii.

Lemat 1.1 *Niech F będzie nietrywialnym unormowanym snopem semistabilnym na $\mathbb{P}^2$. Wtedy $H^0(F(i)) = H^2(F(i)) = 0$ dla $i \in \{-2, -1, 0\}$.*

Dowód. Jeżeli $c_1(F(i)) < 0$ to $\mu(F(i)) < 0 = \mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$ i mamy $\mathcal{H}om(F(i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 0$. Zatem i $H^0(F(i)) = 0$. Z dualności Serre'a mamy $H^2(F(i)) \simeq H^0(F^*(-i-3))^* = \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i-3))^*$. Ponieważ F jest unormowany to $\mu(F) > -1 \geqslant \mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i-3))$, więc $\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i-3))^*$ także się zeruje. Pozostaje tylko do udowodnienia, że $H^0(F) = 0$ jeśli $c_1(F) = 0$. Z tego co już udowodniliśmy, wiemy, że $\chi(F(-1)) = -\dim H^1(F(-1)) \leqslant 0$. Z drugiej strony mamy $\chi(F(-1)) = -c_2(F)$. Zatem $c_2(F) \geqslant 0$. Jedynym snopem semistabilnym z zerowymi klasami Cherna jest $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ więc mamy $c_2(F) > 0$. Wyraz wolny w $p_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}$ jest równy 1, a w p_F wynosi $1 - \frac{c_2(F)}{r}$. Dostajemy zatem $p_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}} > p_F$ i $H^0(F) = 0$.

□

Jeżeli F jest semistabilnym snopem na $\mathbb{P}^2$, to istnieje filtracja $F_0 = 0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n = F$ taka, że ilorazy F_i/F_{i-1} są snopami stabilnymi z zredukowanym wielomianem Hilberta równym p_F. Niech $\mathrm{gr}(F) = \bigoplus F_i/F_{i-1}$. Można pokazać, że $\mathrm{gr}(F)$ jest niezależne od wybranej filtracji. Semistabilne snopy F i G nazywamy *$\mathcal{S}-$równoważnymi* jeśli $\mathrm{gr}(F) \simeq \mathrm{gr}(G)$. Na snopach stabilnych warunek ten redukuje się do izomorfizmu snopów. Ustalmy r, c_1 i c_2 takie, że $-r < c_1 \leqslant 0$. Niech $\underline{\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}}$ będzie funktorem z kategorii schematów skończonego typu nad k do kategorii zbiorów takim, że $\underline{\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}}(S)$ jest zbiorem klas izomorfizmu S-płaskich rodzin snopów semistabilnych rangi r z klasami Cherna c_1 i c_2. Le Potier w [LP1] podaje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.2 *Istnieje przestrzeń moduli $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ będaca obiektem koreprezentującym funktor $\underline{\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}}$ taka, że:*

1. *$\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ jest rozmaitością rzutową.*
2. *Punkty domknięte $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ są w bijekcji z klasami $\mathcal{S}$-równoważności snopów semistabilnych rangi r z klasami Cherna c_1 i c_2.*
3. *Zbiór klas izomorfizmu snopów stabilnych może być utożsamiony z otwartym podzbiorem rozmaitości $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$.*

Ponadto Drezet i Le Potier pokazali, że przestrzeń $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ jest nierozkładalna i normalna. Mamy też:

$$\mathrm{Pic}\left(\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{jeśli } c_2 = r, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{jeśli } c_2 \neq r. \end{cases}$$

Definicja 1.5 Afiniczną grupą algebraiczną G *nazywamy rozmaitość afiniczną ze strukturą grupy taką, że przekształcenia mnożenia $\mu : G \times G \to G$ i brania odwrotności $\beta : G \to G$ są regularne.*

Definicja 1.6 *Algebraicznym działaniem grupy G na X nazywamy działanie $\sigma : G \times X \to X$, które jest przekształceniem regularnym.*

Niech G będzie reduktywną grupą algebraiczną działającą na rozmaitości X. Niech $\pi : \mathcal{L} \to X$ będzie wiązką liniową na X

Definicja 1.7 *Działanie $\bar{\sigma} : G \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ nazywamy $G-$linearyzacją $\mathcal{L}$ jeżeli spełnia następujące warunki:*

1. *Diagram*

$$\begin{tikzcd} G \times \mathcal{L} \arrow[r, "\bar{\sigma}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \pi"'] & \mathcal{L} \arrow[d, "\pi"] \\ G \times X \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

   jest przemienny.

2. *Cięcie zerowe $\mathcal{L}$ jest $G-$niezmiennicze.*

Nie każda wiązka liniowa dopuszcza $G-$linearyzację. W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do szerokich wiązek liniowych.

Definicja 1.8 *Niech $\mathcal{L}$ będzie $G-$zlinearyzowaną szeroką wiązka liniową na X i niech $x \in X$;*

1. *Punkt x nazywamy* semistabilnym *(względem $\mathcal{L}$), jeśli istnieje $m > 0$ i $s \in H^0(\mathcal{L}^{\otimes m})^G$ takie, $s(x) \neq 0$.*

2. *Punkt x nazywamy* stabilnym *(względem $\mathcal{L}$), jeżeli jest semistabilny i ponadto stabilizator G_x jest skończony.*

3. *Punkt x nazywamy* niestabilnym *(względem $\mathcal{L}$), jeśli nie jest semistabilny.*

Zbiór punktów semistabilnych względem $\mathcal{L}$(odpowiednio stabilnych, niestabilnych) będziemy oznaczać przez $X^{ss}_{\mathcal{L}}$ ($X^{s}_{\mathcal{L}}$, $X^{un}_{\mathcal{L}}$). Często będziemy pomijać wypisywanie $\mathcal{L}$, jeśli jasne będzie względem jakiej $G-$zlinearyzowanej wiązki liniowej chcemy badać stabilność punktów. Dla każdej szerokiej wiązki liniowej $\mathcal{L}$ istnieje k takie, że $\mathcal{L}^{\otimes k}$ jest bardzo szeroka. Jeśli $\mathcal{L}$ dopuszcza $G-$linearyzację to $\mathcal{L}^{\otimes k}$ też. Daje nam ona zanurzenie $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ oraz liniową reprezentację $\rho : G \to GL(n+1)$. Działanie G na $\mathbb{A}^{(n+1)}$ dane przez tą reprezentację daje nam działanie G na $\mathbb{P}^n$, które obcięte do X jest naszym oryginalnym działaniem. W dalszym ciągu będziemy zakladali, że grupa G jest reduktywna (por. [Do], str.42). Grupy $SL(m)$ i $PGL(m)$ są takimi grupami.

Definicja 1.9 *Nietrywialny homomorfizm $G^*_m \to G$ nazywamy* jednoparametrową podgrupą *grupy G.*

Niech $x^* \in W$ będzie reprezentantem punktu $x \in \mathbb{P}(W)$. Wybierzmy sobie jednoparametrową podgrupę G i rozpatrzmy działanie indukowane przez złożenie. W odpowiednich współrzędnych na W działanie to wygląda następująco:

$$\lambda(t)x^* = (t^{m_0}x_0, ..., t^{m_n}x_n).$$

Definiujemy

$$\mu(\lambda, x) = max\{-m_i : x_i \neq 0\}.$$

Jest ono dobrze określone i zachodzi:

Twierdzenie 1.3 (kryterium Hilberta-Mumforda) *Niech reduktywna grupa G działa na rozmaitości rzutowej X i niech $\mathcal{L}$ będzie szeroką wiązką liniową z $G-$linearyzacją. Rozpatrzmy liniowe działanie grupy G na przestrzeni wektorowej W, odpowiadające wiązce $\mathcal{L}^{\otimes k}$, która jest bardzo szeroka. Wtedy $x \in X \subset \mathbb{P}(W)$ jest semistabilny (odpowiednio stabilny) względem G wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(x, \lambda) \geqslant 0$ (odpowiednio > 0) dla wszystkich jednoparametrowych podgrup λ w G.*

Niech $PGL(3)$ działa na rozmaitości normalnej X. Nie każda wiązka liniowa dopuszcza linearyzację względem tej grupy. Jednak każda wiązka liniowa postaci $\mathcal{N} = \mathcal{L}^{\otimes 3}$ ma $PGL(3)-$linearyzację (por.[MF],Wniosek 1.6 oraz [Do], Uwagi 7.3). Niech $SL(3) \to PGL(3)$ będzie standardową izogenią, tj. surjekcją z jądrem będącym grupą skończoną. Indukuje ona działanie $SL(3)$ na X. Jest ono linearyzowalne dla każdej wiązki liniowej. Zachodzi wtedy $X^*_{\mathcal{N}}(PGL(3)) = X^*_{\mathcal{N}}(SL(3)) = X^*_{\mathcal{L}}(SL(3))$. Gwiazdka oznacza, że te równości zachodzą dla zbiorów każdego typu. Zatem pełna informację o zbiorach $X^*_{\mathcal{N}}(PGL(3))$ możemy dostać znając zbiory $X^*_{\mathcal{L}}(SL(3))$. W naszej pracy tę strategie zastosujemy do działania $PGL(3)$ na $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$, określonego tak, że dla $g \in PGL(3)$ i $[F] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ mamy $g[F] = [g^*F]$.

Rozdział 2

Konstrukcja morfizmu Hulka

Niech E będzie unormowaną wiązką wektorową rangi 2, a L prostą w $\mathbb{P}^2$. Z twierdzenia Grauerta-Mülicha wiemy, że dla ogólnej prostej L mamy

$$E_{|L} = \begin{cases} \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L & \text{jeśli } c_1(E) = 0, \\ \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1) & \text{jeśli } c_1(E) = -1. \end{cases}$$

Proste, na których E rozszczepia się inaczej nazywamy *prostymi skoku*. Zauważmy, że warunek ten można podać w terminach kohomologii. Mianowicie, L jest prostą skoku wtedy i tylko wtedy, gdy $h^1(E(-c_1 - 1)_{|L}) \neq 0$. W ten sposób możemy mówić o prostych skoku dla dowolnego snopa semistabilnego.

Barth w [Ba1] pokazał, że dla stabilnej wiązki wektorowej E takiej, że $[E] \in \mathcal{M}^{\mathrm{slf}}_{\mathbb{P}^2}(2, 0, n)$ zbiór

$$J(E) = \{l \in \mathbb{P}^{2^*} : l \text{ jest prostą skoku}\} \subset \mathbb{P}^{2^*}$$

może być w naturalny sposób utożsamiony z nośnikiem dywizora D_E stopnia n. Ponadto pokazał on, że w istocie dostajemy morfizm z $\mathcal{M}^{\mathrm{slf}}_{\mathbb{P}^2}(2, 0, n)$ do $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2^*}, \mathcal{O}(n))^*)$ (czyli do przestrzeni krzywych stopnia n w $(\mathbb{P}^2)^*$). Maruyama w [Ma] uogólnił ten wynik pokazując, że analogiczny dywizor jest dobrze określony na klasach $\mathcal{S}-$równoważności snopów semistabilnych z pierwszą klasą Cherna równą 0 i że morfizm Bartha można rozszerzyć do $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, 0, n)$.

W przypadku $c_1 = -1$ Hulek w [Hu] uzyskał wynik podobny do rezultatu Bartha. Dla stabilnej wiązki wektorowej E rangi 2 na $\mathbb{P}^2$ z pierwszą klasą Cherna $c_1(E) = -1$ zdefiniował on *prostą skoku drugiego typu*. Jest to taka prosta $l \in (\mathbb{P}^2)^*$, dla której $h^0(E_{|2L}) \neq 0$. Wygodniej nam jednak będzie posługiwać się kryterium podanym w terminach h^1. Z ciągu dokładnego

$$0 \longrightarrow E(-2) \longrightarrow E \longrightarrow E_{|2L} \longrightarrow 0$$

dla wiązki wektorowej E dostajemy $\chi(2L; E_{|2L}) = \chi(\mathbb{P}^2; E) - \chi(\mathbb{P}^2; E(-2))$. Korzystając z postaci wielomianu Hilberta na $\mathbb{P}^2$ wyliczamy, że $\chi(2L; E_{|2L}) = 0$. Zatem $h^0(E_{|2L}) = h^1(E_{|2L})$ i możemy uogólnić definicję Hulka w następujący sposób:

Definicja 2.1 *Niech E będzie stabilnym snopem rangi 2 z $c_1(E) = -1$. Prostą $l \in (\mathbb{P}^2)^*$ nazywamy* prostą skoku drugiego typu *dla E wtedy i tylko wtedy gdy $h^1(E_{|2L}) \neq 0$.*

Dla E lokalnie wolnego Hulek pokazał, że podobnie jak $J(E)$, zbiór

$$C(E) = \{l \in (\mathbb{P}^2)^* : l \text{ jest prostą skoku drugiego typu}\} \subset (\mathbb{P}^2)^*$$

może być w naturalny sposób utożsamiony z nośnikiem dywizora D_E stopnia $2(c_2(E)-1)$. Mamy także, choć Hulek nie pokazał tego w swej pracy, analogiczny morfizm z $\mathcal{M}^{\mathrm{lf}}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ do $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2^*},\mathcal{O}(2n-2))^*)$. Naszym celem będzie rozszerzenie go do $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$. Tutaj należy się parę słów wyjaśnienia odnośnie tego problemu. Podwójna prosta $2L$ jest szczególnym przypadkiem stożkowej w $\mathbb{P}^2$. Definicję prostej skoku drugiego typu można rozszerzyć na dowolną stożkową $C\subset\mathbb{P}^2$. Mówimy, że C jest *stożkową skoku* dla E jeśli $h^1(E_{|C})\neq 0$. W tym wypadku zbiór stożkowych skoku może być traktowany jako nośnik dywizora w przestrzeni $\mathbb{P}^5=\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))^*)$, parametryzującej krzywe stopnia 2 w $\mathbb{P}^2$. Z pracy [St] wynika, że istnieje morfizm z $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ do $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^5,\mathcal{O}(n-1))^*)$. Proste podwójne są parametryzowane przez obraz S drugiego przekształcenia Veronese $(\mathbb{P}^2)^*\hookrightarrow\mathbb{P}^5$. Używając tego włożenia mamy przekształcenie obcięcia

$$H^0\left(\mathbb{P}^5,\mathcal{O}(n-1)\right)\longrightarrow H^0\left(S,\mathcal{O}_S(n-1)\right)\simeq H^0\left((\mathbb{P}^2)^*,\mathcal{O}(2n-2)\right),$$

które indukuje przekształcenie wymierne $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^5,\mathcal{O}(n-1))^*)\dashrightarrow\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2^*},\mathcal{O}(2n-2))^*)$. Rozpatrzmy złożenie $\beta\circ\alpha$ tak jak na poniższym diagramie.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^5,\mathcal{O}(n-1))^*) \arrow[d, dashed, "\beta"] \\
& \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2^*},\mathcal{O}(2n-2))^*)
\end{tikzcd}$$

Pokażemy (zob. twierdzenie (2.7)), że jest ono morfizmem. Będziemy go nazywać *morfizmem Hulka*. Zakładając rezultat Strømme [St], fakt ten wynika z tego, że przecięcie S z dywizorem stożkowych skoku jest krzywą. My pokażemy to nie używając [St].

Podstawą rezultatu Hulka jest pokazany przez niego fakt, że dla stabilnej wiązki wektorowej E rangi 2 z $c_1(E)=-1$ ogólna prosta nie jest prostą skoku drugiego typu. Pokażemy, że tak jest także dla stabilnych snopów.

Przypomnijmy, że na powierzchni refleksywizacja snopa beztorsyjnego E jest lokalnie wolna. Ponadto mamy kanoniczny krótki ciąg dokładny:

$$0\longrightarrow E\longrightarrow E^{**}\longrightarrow T\longrightarrow 0,$$

gdzie T jest snopem o nośniku w skończonej liczbie punktów $x_1,...,x_t$.

Lemat 2.1 *Niech L będzie prostą w $\mathbb{P}^2$ nie przechodzącą przez żaden z punktów $x_1,...,x_t$. Wtedy $E_{|2L}$ i $E^{**}_{|2L}$ są izomorficzne.*

Dowód. Niech $z=0$ będzie równaniem prostej l. Wystarczy rozpatrzyć teraz następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E(-2) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot z^2"] & E^{**}(-2) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot z^2"] & T(-2) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot z^2", "\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & E^{**} \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& E_{|2L} \arrow[r] \arrow[d] & E^{**}_{|2L} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Z lematu o wężu stwierdzamy, że $E_{|2L} \simeq E^{**}_{|2L}$.

□

Jeżeli zastosujemy wynik Hulka do E^{**} i użyjemy powyższego lematu to dostaniemy:

Wniosek 2.2 *Niech E będzie stabilnym snopem z pierwszą klasą Cherna $c_1(E) = -1$. Wtedy dla ogólnej prostej $l \in (\mathbb{P}^2)^*$ mamy $h^0(E_{|2L}) = h^1(E_{|2L}) = 0$.*

Niech $[z_0, z_1, z_2]$ i $[z_0^*, z_1^*, z_2^*]$ bedą współrzędnymi na $\mathbb{P}^2$ i $(\mathbb{P}^2)^*$ odpowiednio. Niech $\mathbb{F}^2 \subset \mathbb{P}^{2*} \times \mathbb{P}^2$ bedzię niezredukowaną rozmaitością flag daną przez równanie $(z_0^* z_0 + z_1^* z_1 + z_2^* z_2)^2 = 0$. Dostajemy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{P}^2 \\ (\mathbb{P}^2)^* & \end{tikzcd}$$

Rozwłóknienia p i q są lokalnie trywialne. Jeżeli $l \in (\mathbb{P}^2)^*$ to p obcięte do $q^{-1}(l)$ jest izomorfizmem na $2L \subset \mathbb{P}^2$ i mamy równość $H^i(p^* E_{|q^{-1}(l)}) = H^i(E_{|2L})$ dla $i \geqslant 0$. Ponadto, ponieważ włókna q są jednowymiarowe to na mocy wniosku 11.2 w rozdziale III w [Ha1], wiemy że $R^2 q_*(G) = 0$ dla dowolnego snopa G na $\mathbb{F}^2$. Z tego faktu będziemy często korzystać bez wyraźnego zaznaczenia. Zauważmy, że

$$C(E) = \{l \in (\mathbb{P}^2)^* : h^1(E_{|2L}) \neq 0\} = \{l \in (\mathbb{P}^2)^* : h^1(p^* E_{q^{-1}(l)}) \geqslant 1\}$$

zatem z twierdzenia o półciągłości [Ha1] (III 12.8) i wniosku 2.2 zbiór $C(E)$ jest domkniętym podzbiorem $(\mathbb{P}^2)^*$ wymiaru $\leqslant 1$.

Dywizor prostych skoku drugiego typu D_E zdefiniujemy za pomocą snopa $R^1 q_* p^*(E)$.

Lemat 2.3 *Nośnikiem $R^1 q_* p^*(E)$ jest $C(E)$.*

Dowód. Niech $l \in (\mathbb{P}^2)^*$, Z ciągu

$$0 \longrightarrow J_{q^{-1}(l)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_{q^{-1}(l)} \longrightarrow 0$$

dostajemy

$$0 \longrightarrow p^* E \otimes J_{q^{-1}(l)} \longrightarrow p^* E \longrightarrow p^* E_{q^{-1}(l)} \longrightarrow 0$$

Z długiego ciągu kohomologii dostajemy surjekcję:

$$R^1 q_* p^*(E) \longrightarrow R^1 q_*(p^* E_{q^{-1}(l)}) \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

Ponadto $q|q^{-1}(l)$ idzie w $l = \mathrm{Spec}(k(l))$ czyli rozmaitość afiniczną więc na mocy twierdzenia III.8.5 w [Ha1] stwierdzamy, że $R^1 q_*(p^* E_{q^{-1}(l)})) = H^1(E_{|2L}) \otimes \mathcal{O}_l$

Jeżeli obetniemy (2.1) do punktu $l \in (\mathbb{P}^2)^*$, co sprowadza się do tensorowania przez $k(l)$, dostaniemy surjekcję

$$R^1 q_* p^* E \otimes k(l) \longrightarrow H^1(E_{|2L}) \longrightarrow 0,$$

która pokazuje, że $C(E) \subset \mathrm{supp}(R^1 q_* p^*(E))$.

Rozważmy teraz otwarty zbiór $U = \{l \in (\mathbb{P}^2)^* : h^1(E_{|2L}) = 0\} = (\mathbb{P}^2)^* \backslash C(E)$. Odwzorowanie $q' = q_{|q^{-1}(U)} : q^{-1}(U) \to U$, jest rzutowe i funkcja

$$h^1(l, p^* E) = dim_{k(l)} H^1(q^{-1}(U)_l, (p^* E)_l)$$

jest stała na punktach domkniętych $l \in U$

$$h^1(l, p^*E) = dim_{k(l)} H^1(q^{-1}(U)_l, (p^*E)_l) = h^1(p^*E_{|q^{-1}(l)}) = h^1(E_{|2L}) = 0$$

Ponadto jest ona półciągła z góry ([Ha1] twierdzenie 12.8, rozdział III) więc jest stała na całym U. Z twierdzenia Grauerta ([Ha1], wniosek 12.9, rozdział III) mamy $R^1 q'_* p^* E = 0$ co daje nam $R^1 q_* p^* E_{|U} = 0$. Stwierdzamy więc, że również $C(E) \supset \mathrm{supp}(R^1 q_* p^*(E))$ co kończy dowód.

$\square$

Strukturę dywizora na $C(E)$ wprowadzamy za pomocą zerowego ideału Fittinga $F = \mathrm{Fitt}_0(R^1 q_* p^* E) \hookrightarrow \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2)^*}$ w następujący sposób:

$$D_E = (C(E), \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2)^*}/F)$$

Aby policzyć stopień D_E skonstruujemy rezolwentę

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow R^1 q_* p^* E \longrightarrow 0$$

taką, że E_1 i E_2 są snopami lokalnie wolnymi. Ponieważ $R^1 q_* p^* E$ jest torsyjny, więc E_1 i E_2 są tej samej rangi. Wtedy

$$F = \det(E_1) \otimes \det(E_2^*) = \mathcal{O}(c_1(E_1) - c_1(E_2))$$

oraz

$$\deg D_E = -c_1(E_1) + c_1(E_2) \tag{2.2}$$

W szczególności, jeżeli pokażemy, że $\deg D_E \neq 0$, to udowodnimy, że wprowadzona struktura schematu na $C(E)$ jest krzywą Cohena-Macaulaya (tzn. niepustym schematem wymiaru 1 bez włożonych $0-$wymiarowych składowych).

Na mocy twierdzenia Serre'a dla $m << 0$ snop $E(-m)$ jest globalnie generowany zatem istnieje surjekcja $\bigoplus_{i=1}^t \mathcal{O} \to E(-m) \to 0$. Po stensorowaniu przez $\mathcal{O}(m)$ otrzymujemy ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}(m) \longrightarrow E \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

gdzie $m < 0$. Stwierdzenie 1.1 w [Ha2] zapewnia nam, że E' jest refleksywny. Ale snopy refleksywne na $\mathbb{P}^2$ są lokalnie wolne, więc E' lokalnie wolny. Ponadto z długiego ciągu dokładnego dla (2.3) dostajemy $H^0(E') = 0$.

Lemat 2.4 ([OSS], Lemat 2.2.2) *Niech G będzie semistabilną wiązką wektorową rangi 2 na $\mathbb{P}^2$ z pierwszą klasą Cherna $c_1(G) = 0$. Wtedy istnieje rezolwenta*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}(k_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{O}(l_j) \longrightarrow G(-1) \longrightarrow 0$$

taka, że $k_i, l_j < 0$.

Założenia tego lematu można jednak osłabić. Z jego dowodu widać, że do istnienia takiej rezolwenty dla $G(-1)$ wystarczy tylko by $G(-1)$ było wiązką wektorową na $\mathbb{P}^2$ i $H^0(G(-1)) = 0$. Takie założenia spełnia E' więc mamy także rezolwentę

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}(k_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{O}(l_j) \longrightarrow E' \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

gdzie $k_i, l_j < 0$.

Z płaskości p wnioskujemy, że $p^*(E)$ jest beztorsyjne. Zatem i $q_*p^*(E)$ jest beztorsyjny. Z wniosku (2.2) wiemy, że $h^0(E_{|2L}) = h^0(p^*(E)_{|q^{-1}(l)}) = 0$ dla ogólnej prostej. Zbiór otwarty $U = l \in (\mathbb{P}^2)^* : h^0(E_{|2L}) = 0$ jest więc niepusty. Argumentując tak samo jak w lemacie (2.3) stwierdzamy, że $q_*p^*E_{|U} = 0$. Ale q_*p^*E jest beztorsyjny, wieć $q_*p^*E = 0$. Zatem z (2.3) i z płaskości p mamy następujący krótki ciąg dokładny:

$$0 \longrightarrow p^*(E') \longrightarrow p^*(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}(m)) \longrightarrow p^*(E) \longrightarrow 0.$$

Używając go dostajemy krótki ciąg dokładny:

$$0 \longrightarrow R^1q_*p^*(E') \longrightarrow R^1q_*p^*(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}(m)) \longrightarrow R^1q_*p^*(E) \longrightarrow 0. \tag{2.5}$$

Ponadto $q_*p^*(E') \hookrightarrow q_*p^*(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}(m)) = 0$ więc z (2.4) podobnie dostajemy także:

$$0 \longrightarrow R^1q_*p^*(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}(k_i)) \longrightarrow R^1q_*p^*(\bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{O}(l_j)) \longrightarrow R^1q_*p^*(E') \longrightarrow 0. \tag{2.6}$$

Pokażemy teraz, że ciąg (2.5) jest lokalnie wolną rezolwentą $R^1q_*p^*(E)$. Ciąg (2.6) posłuży nam do policzenia $c_1(R^1q_*p^*(E'))$.

Rozpatrzmy następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker\alpha \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{2L} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{L} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathcal{O}_L(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Z lematu o wężu stwierdzamy, że $\ker\alpha \simeq \mathcal{O}_L(-1)$ oraz $\operatorname{coker}\alpha \simeq 0$. Dostajemy zatem ciąg:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_L(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{2L} \longrightarrow \mathcal{O}_L \longrightarrow 0$$

Przetensorujmy go przez $\mathcal{O}(k)$ i przyjrzyjmy się początkowemu fragmentowi długiego ciągu dokładnego kohomologii:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_L(k-1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{2L}(k)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_L(k)).$$

Jeżeli $k < 0$ to stwierdzamy, że $H^0(\mathcal{O}_{2L}(k)) \simeq H^0(\mathcal{O}_L(k-1)) = 0$. Pamiętając o tym, że także $H^i(\mathcal{O}_{2L}(k)) = 0$ dla $i > 1$ stwierdzamy, że $h^1(\mathcal{O}_{2L}(k)) = -\chi(2L, \mathcal{O}_{2L}(k))$. Z wcześniej rozważanego ciągu

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(k-2) \longrightarrow \mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathcal{O}_{2L}(k) \longrightarrow 0$$

mamy

$$\chi(2L, \mathcal{O}_{2L}(k)) = \chi(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(k)) - \chi(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(k-2))$$

czyli $h^1(\mathcal{O}(k)_{|2L})$ jest niezależne od wyboru L. Zatem $R^1q_*p^*(\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(k_i))$, $R^1q_*p^*(\bigoplus_{j=1}^s \mathcal{O}(l_i))$ oraz $R^1q_*p^*(\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(m))$, są lokalnie wolne na mocy twierdzenia Grauerta. Podobnie, jeżeli pokażemy, że $H^0(E'_{|2L}) = 0$ to identyczne argumenty pozwolą nam stwierdzić, że $R^1q_*p^*(E')$ jest lokalnie wolny. Przetensorujmy ciąg (2.3) przez $\mathcal{O}_{2L}$. Ponieważ $\mathcal{T}or^1(\bigoplus_{i=1}^t \mathcal{O}(m), \mathcal{O}_{2L}) = 0$ to mamy:

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}or^1(E, \mathcal{O}_{2L}) \longrightarrow E'_{|2L} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}_{2L}(m) \longrightarrow E_{|2L} \longrightarrow 0.$$

Ponieważ $E'_{|2L}$ jest lokalnie wolny to $\mathcal{T}or^1(E, \mathcal{O}_{2L})$ jako snop na $2L$ jest beztorsyjny. Zauważmy, że dla dowolnego punktu $x \in L$ mamy $(\mathcal{T}or^1(E, \mathcal{O}_{2L}))_x = \mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,x}}(E_x, \mathcal{O}_{2L,x})$. Ale jeżeli E jest lokalnie wolny w x to $E_x \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,x} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,x}$ i $(\mathcal{T}or^1(E, \mathcal{O}_{2L}))_x = 0$ więc $\mathcal{T}or^1(E, \mathcal{O}_{2L}) = 0$. Zatem $E'_{|2L}$ jest podsnopem $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{2L}(m)$ i dostajemy $H^0(E'_{|2L}) = 0$.

Twierdzenie 2.5 *Stopień dywizora D_E jest równy* $2(c_2(E) - 1)$.

Aby udowodnić to twierdzenie będzie nam potrzebny następujący:

Lemat 2.6 $c_1(R^1q_*p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) = \begin{cases} -(k-1)k & \textit{jeśli } k < 0, \\ 0 & \textit{jeśli } k \geqslant 0. \end{cases}$

Dowód. Niech $\mathcal{O}(a,b)$ oznacza produkt tensorowy $\bar{p}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a) \otimes \bar{q}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b)$, gdzie $\bar{p} : \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^2)^* \to \mathbb{P}^2$, $\bar{q} : \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^2)^* \to (\mathbb{P}^2)^*$ są rzutowaniami. Oczywiście $p = \bar{p}_{|\mathbb{F}^2}$ i $q = \bar{q}_{|\mathbb{F}^2}$. Rozważmy $\mathbb{F}^2$ jako dywizor w $\mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^2)^*$. Z tego jak określiliśmy $\mathbb{F}^2$ wynika, że odpowiadająca mu wiązka liniowa to $\mathcal{O}_{\mathbb{F}^2} = \mathcal{O}(2,2)$ i mamy ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2,-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^2)^*} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}^2} \longrightarrow 0.$$

Przetensorujmy go przez $\mathcal{O}(k,0)$ i zrzutujmy na $(\mathbb{P}^2)^*$. Następujący ciąg jest dokładny:

$$\begin{aligned} R^1\bar{q}_*(\mathcal{O}(k,0)) &\longrightarrow R^1\bar{q}_*(\bar{p}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}^2}) \longrightarrow R^2\bar{q}_*(\mathcal{O}(k-2,-2)) \longrightarrow \\ &\longrightarrow R^2\bar{q}_*(\mathcal{O}(k,0)) \longrightarrow R^2\bar{q}_*(\bar{p}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}^2}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dzięki formule rzutowania wiemy, że

$$R^i\bar{q}_*(\mathcal{O}(a,b)) = R^i\bar{q}_*(\bar{p}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a)) \otimes \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2)^*}(b).$$

Z twierdzenia o zmianie bazy ([Ha1], stwierdzenie 9.3, rozdział III) mamy także:

$$R^i\bar{q}_*(\bar{p}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a)) = H^i(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a)) \otimes \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2)^*}.$$

Korzystając jeszcze z równości

$$R^i\bar{q}_*(\bar{p}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}^2}) = R^iq_*p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a)$$

z ciągu (2.7) dostajemy ciąg

$$0 \longrightarrow R^1 q_* p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-2)) \otimes \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2)^*}(-2) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) \otimes \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2)^*} \longrightarrow 0.$$

Zatem

$$c_1(R^1 q_* p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) = (-2) \cdot h^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-2)) = \begin{cases} -(k-1)k, & \text{dla } k < 0 \\ 0 & \text{dla } k \geqslant 0 \end{cases}.$$

□

Dowód.[twierdzenia 2.5] Z (2.3) i (2.4) mamy następujące zależności:

$$\begin{aligned} tm &= c_1(E') + c_1(E) = c_1(E') - 1, \\ \binom{t}{2} m^2 &= c_2(E') + c_2(E) + c_1(E')c_1(E) = c_2(E') + c_2(E) - c_1(E'), \\ c_1(E') &= \sum_{j=1}^{s} l_j - \sum_{i=1}^{r} k_i, \\ c_2(E') &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant s} l_i l_j - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} k_i k_j - c_1(E')(\sum_{i=1}^{r} k_i). \end{aligned}$$

Używając ich i powyższego lematu obliczamy

$$\begin{aligned} c_1(R^1 q_* p^*(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}(m))) &= -t(m^2 - m) = tm - tm^2 = tm + t(t-1)m^2 - (tm)^2 = \\ &= c_1(E') - 1 + 2(c_2(E') + c_2(E) - c_1(E')) - (c_1(E') - 1)^2 = \\ &= 2(c_2(E) - 1) + c_1(E') + 2c_2(E') - (c_1(E'))^2. \end{aligned}$$

Dzięki rezolwencie (2.6) wykonując podobne obliczenia mamy

$$\begin{aligned} c_1(R^1 q_* p^*(E')) &= c_1(R^1 q_* p^*(\bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{O}(l_j))) - c_1(R^1 q_* p^*(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}(k_i))) = \\ &= -\sum_{i=j}^{s} ({l_j}^2 - l_j) + \sum_{i=1}^{r} ({k_i}^2 - k_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{r} {k_i}^2 - \sum_{i=j}^{s} {l_j}^2 + c_1(E') = \\ &= (\sum_{i=1}^{r} k_i)^2 - (\sum_{i=j}^{s} l_j)^2 + 2c_2(E') + 2c_1(E')(\sum_{i=1}^{r} k_i) + c_1(E') = \\ &= (\sum_{i=1}^{r} k_i)^2 - ((\sum_{i=1}^{r} k_i + c_1(E'))^2 + 2c_2(E') + 2c_1(E')(\sum_{i=1}^{r} k_i) + c_1(E') = \\ &= 2c_2(E') + c_1(E') - (c_1(E'))^2. \end{aligned}$$

Ostatecznie z rezolwenty (2.5) dostajemy

$$\deg D_E = c_1(R^1 q_* p^*(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}(m))) - c_1(R^1 q_* p^*(E')) = 2(c_2(E) - 1).$$

□

Twierdzenie 2.7 *Istnieje morfizm z $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ do $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2*},\mathcal{O}(2n-2))^*)$ taki, że $[F] \mapsto D_F$.*

Tak jak wcześniej ustaliliśmy, morfizm z powyższego twierdzenia będziemy nazywać *morfizmem Hulka.*

Dowód. Niech S będzie dowolnym schematem skończonego typu nad k. W szczególności S jest neotherowski. Niech $\tilde{E}$ będzie S-płaskim snopem koherentnym na $\mathbb{P}^2_S = \mathbb{P}^2 \times_k S$ takim, że dla każdego domkniętego punktu $s \in S$ snop $\widetilde{E}_s = \widetilde{E} \times_{\mathcal{O}_S} k(s)$ jest stabilnym snopem na $\mathbb{P}^2_s$ z klasami Cherna $c_1(\widetilde{E}_s) = -1$ i $c_2(\widetilde{E}_s) = n$. Skoro przestrzeń moduli $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ jest obiektem koreprezentującym funktor $\underline{\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}}$ to wystarczy sprawdzić, że istnieje relatywny dywizor Cartier $D_{\widetilde{E}}$ na $(\mathbb{P}^2)^*_S = (\mathbb{P}^2)^* \times_k S$ taki, że $(D_{\widetilde{E}})_s = D_{\widetilde{E}_s}$. Mamy następujące rzutowania

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^2_S \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & S \\
\mathbb{P}^2 &
\end{tikzcd}$$

Jeżeli potraktujemy $\mathbb{P}^2_S$ jako schemat nad S to wprost z definicji dostajemy, że $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_S}(1) \simeq \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ jest snopem π_2-bardzo szerokim. Analizując dowód stwierdzenia 2.1.2, rozdział III w [Ha1] można stwierdzić, że do równoważności i) oraz ii) nie jest potrzebne założenie o całkowitości. Zatem dla $m << 0$ snop $\widehat{E} = \pi_{2*}(\widetilde{E}(-m))$ jest lokalnie wolny. Ponadto, zmniejszając m w razie potrzeby, z twierdzenia 8.8a, rozdział III w [Ha1] mamy surjekcję:

$$\pi_2^*\pi_{2*}(\widetilde{E}(-m)) \longrightarrow \widetilde{E}(-m) \longrightarrow 0.$$

Zatem mamy następujący ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \widetilde{E'} \longrightarrow \pi_2^*(\widehat{E})(m) \longrightarrow \widetilde{E} \longrightarrow 0$$

gdzie $\widehat{E}$ jest snopem lokalnie wolnym na S i $m < 0$. Na włóknie $\mathbb{P}^2_{k(s)}$ nad domkniętym punktem $s \in S$ dostajemy rezolwentę

$$0 \longrightarrow \widetilde{E'}_s \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}(m) \longrightarrow \widetilde{E}_s \longrightarrow 0$$

analogiczną do (2.3).

Niech $\mathbb{F}^2_S = \mathbb{F}^2 \times_k S$. Rozpatrzmy diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^2_s \arrow[r, "\widetilde{p_s}"] \arrow[d, "\widetilde{q_s}"] \arrow[dr, "i_1"] & \mathbb{P}^2_s \arrow[dr, "i_0"] & \\
(\mathbb{P}^2)^*_s \arrow[dr, "i_2"] & \mathbb{F}^2_S \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d, "\widetilde{q}"] & \mathbb{P}^2_S \\
& (\mathbb{P}^2)^*_S &
\end{tikzcd}$$

Niech $y = l \times_k s \in (\mathbb{P}^2)^*_S$ będzie punktem domkniętym, a F snopem koherentnym na $\mathbb{P}^2_S$. Wtedy

$$H^i((\mathbb{F}^2_S)_y, (\widetilde{p}^*F)_y) = H^i((\mathbb{F}^2_s)_l, (\widetilde{p_s}^*F_s)_l) = H^i((F_s)_{|2L}).$$

Zatem dla domkniętych punktów $y \in (\mathbb{P}^2)^*_S$ korzystając z obliczeń wykonanych przed twierdzeniem 2.5 mamy

$$H^i((\mathbb{F}^2_S)_y, (\widetilde{p}^*F)_y) = 0$$

dla $i \neq 1$ oraz $F = \widetilde{E'}$ i $F = \pi_2^*(\widehat{E})(m)$. Analogiczny argument jak na końcu lematu 2.3 gwarantuje nam tę równość także dla punktów, które nie są domknięte. W naszej sytuacji nie możemy skorzystać z twierdzenia Grauerta ponieważ założenie całkowitości bazy $(\mathbb{P}^2)^*_S$ nie jest spełnione (por. [Ha1] wniosek 12.9, rozdział III oraz [EGA] stwierdzenie 7.8.4 e). Jednak to co przed chwilą pokazaliśmy na mocy wniosku 7.9.9 w [EGA] pozwala nam stwierdzić, że snopy $\widetilde{E_1} = R^1\widetilde{q}_*\widetilde{p}^*(\widetilde{E'})$ oraz $\widetilde{E_2} = R^1\widetilde{q}_*\widetilde{p}^*(\pi_2^*(\widehat{E})(m))$ są lokalnie wolne. Ponadto dowód stwierdzenia 7.9.7 i twierdzenie 7.7.5 w [EGA] pokazują, że przy zmianie bazy danej diagramem

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^2_s \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\widetilde{q}_s"] & \mathbb{F}^2_S \arrow[d, "\widetilde{q}"] \\ (\mathbb{P}^2)^*_s \arrow[r, "i_2"] & (\mathbb{P}^2)^*_S \end{tikzcd}$$

naturalne przekształcenie

$$i_2{}^*R^1\widetilde{q}_*\widetilde{p}^*(F) \longrightarrow R^1\widetilde{q}_{s*}(i_1^*\widetilde{p}^*(F))$$

jest izomorfizmem. Niech $s \in S$ będzie punktem domkniętym. Ponieważ $i_1^*\widetilde{p}^* = \widetilde{p_s}^*i_0^*$ mamy następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{E_1})_s \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & R^1\widetilde{q}_{s*}\widetilde{p_s}^*(\widetilde{E'}_s) \arrow[d] \\ (\widetilde{E_2})_s \arrow[r, "\simeq"] & R^1\widetilde{q}_{s*}\widetilde{p_s}^*(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(m)) \end{tikzcd}$$

Z wcześniejszych rozważań wynika, że snopy po prawej stronie tego diagramu są wiązkami wektorowymi tej samej rangi. Zatem $\widetilde{E_1}$ i $\widetilde{E_1}$ mają też taką samą rangę. Tak jak wcześniej definiujemy dywizor $D_{\widetilde{E}}$ za pomocą $\det(\widetilde{E_1}) \otimes \det(\widetilde{E_1}^*)$. Ponadto powyższy diagram daje nam $(D_{\widetilde{E}})_s = D_{\widetilde{E}_s}$, więc $D_{\widetilde{E}}$ jest relatywnym dywizorem Cartier. To kończy dowód.

$\square$

Rozdział 3

Wiązki Hulsbergena

W tym rozdziale przyjrzymy się szczególnym przypadkom unormowanych wiązek wektorowych rangi 2, dla których łatwo będzie znaleźć równanie krzywej prostych skoku lub prostych skoku drugiego typu.

Definicja 3.1 *Niech F będzie unormowaną wiązką wektorową rangi 2 na $\mathbb{P}^2$. Jeżeli istnieje nierozszczepialny krótki ciąg dokładny*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow F(1) \longrightarrow \mathcal{I}_Z(2 + c_1(F)) \longrightarrow 0,$$

gdzie $Z \subset P^2$ jest $0-$wymiarowym domkniętym podschematem to F nazywamy wiązką Hulsbergena.

Po przetensorowaniu przez $\mathcal{O}(-1)$ z długiego ciągu kohomologii dostajemy $H^0(F) \simeq H^0(\mathcal{I}_Z(1 + c_1(F)))$. Zatem $H^0(F) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $c_1(F) = 0$ oraz Z jest zawarty w jakiejś prostej. Dostaliśmy więc proste kryterium na stabilność takich wiązek.

Stabilne wiązki Hulsbergena można otrzymać używając konstrukcji Serre'a. Ustalmy najpierw $\delta \in \{-1, 0\}$. Liczba ta będzie wyznaczała pierwszą klasę Cherna konstruowanej wiązki. Niech Z składa sie z N różnych punktów $x_1, ..., x_N \in \mathbb{P}^2$. Jeżeli $\delta = 0$ to żądamy dodatkowo by Z nie był zawarty w jednej prostej. Niech F' będzie dany przez rozszerzenie:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow F' \longrightarrow \mathcal{I}_Z(2 + \delta) \longrightarrow 0,$$

które się nie rozszczepia. Takie rozszerzenia są parametryzowane przez niezerowe wektory przestrzeni wektorowej

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(2 + \delta), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{x_i}(1 + \delta)$$

Jeżeli wybierzemy rozszerzenie odpowiadające wektorowi, którego wszystkie składniki w sumie prostej $\bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{x_i}(1+\delta)$ są niezerowe to F' jest lokalnie wolne. W takim przypadku $F := F'(-1)$ jest stabilną wiązką Hulsbergena z klasami Cherna $c_1(F) = \delta$ i $c_2(F) = N+1+\delta$. Przy takiej konstrukcji łatwo można opisać krzywą prostych skoku lub krzywą prostych skoku drugiego typu dla F. To o którą krzywą chodzi zależy od δ w oczywisty sposób. Niech $L_1, ..., L_N$ będą formami liniowymi odpowiadającymi równaniom prostych $x_1^*, ..., x_N^* \in (\mathbb{P}^2)^*$. Definiujemy $f_i = \Pi_{j \neq i} L_j^{1-\delta}$. Są one liniowo niezależne jako wektory w $H^0((\mathbb{P}^2)^*, \mathcal{O}((1 - \delta)(N - 1)))$. Niech W oznacza rozpiętą przez nie podprzestrzeń. Hulsbergen w [Hb] i Hulek w [Hu] pokazali, że istnieje izomorfizm $\sigma : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{I}_Z(2+\delta)) \to W$ taki, że jeżeli $\epsilon \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{I}_Z(2+\delta))$ przechodzi na $\sigma(\epsilon) = \sum_{i=1}^N a_i f_i$ to snop F definiowany przez niego jest wiązką wektorową wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie $a_i \neq 0$. W takim przypadku równanie $\sum_{i=1}^{N} a_i f_i = 0$ definiuje w zależności od δ krzywą prostych skoku lub krzywą prostych skoku drugiego typu. Dzięki takiemu opisowi tych krzywych możemy znaleźć takie stabilne wiązki wektorowe, których krzywa prostych skoku jest gładka lub których osobliwości krzywej prostych skoku drugiego typu są pętlami krotności 2. Wybierzmy punkty $x_1, ..., x_N$, tak by żadne trzy nie były współliniowe, a przez $l_{ij} \in (\mathbb{P}^2)^*$ oznaczmy punkt odpowiadający prostej przechodzącej przez x_i oraz x_j. Na mocy twierdzenia Bertiniego dla ogólnych $a_1, ..., a_N$ jeżeli $\delta = 0$ to krzywa prostych skoku dla F jest krzywą gładką, a dla $\delta = -1$ krzywa prostych skoku drugiego typu jest krzywą mającą osobliwości tylko w punktach l_{ij} i są to pętle krotności 2.

Z drugiej strony możemy także otrzymać wiązki, które mają zadany typ rozkładu na prostej L. Załóżmy, że L zawiera dokładnie d punktów z Z. Wtedy $\mathcal{I}_{Z,L} = \mathcal{O}_L(-d)$ i mamy surjekcję $F_{|L} \to \mathcal{O}_L(1-d+\delta) \to 0$. Skoro F jest lokalnie wolny to jądrem tego przekształcenia musi być $\mathcal{O}(d-1)_{|L}$. Ciąg

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_L(d-1) \longrightarrow F_{|L} \longrightarrow \mathcal{O}_L(1-d+\delta) \longrightarrow 0$$

rozszczepia się jeżeli $2d-2-\delta > -2$ i mamy wtedy $F_{|L} = \mathcal{O}|L(d-1) \oplus \mathcal{O}_L(1-d+\delta)$. W tym miejscy możemy zauważyc, że jeżeli $\delta = -1$ to dostajemy wiązki, które mają tylko skończenie wiele prostych skoku. Są to proste, które przechodzą przez co najmniej dwa punkty spośród $x_1, ..., x_N$.

Rozdział 4

Działanie $SL(3)$ na przestrzeni moduli snopów semistabilnych rangi 2

Morfizm Hulka posłuży nam do powiązania zagadnienia stabilności punktów przestrzeni $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ względem działania $SL(V)$ ze stabilnością punktów względem działania tej samej grupy na przestrzeni krzywych stopnia $2(n-1)$ na $(\mathbb{P}^2)^*$. Skorzystamy w tym celu z następującego twierdzenia Mumforda-Reichsteina (por. [Re], Twierdzenie 2.1):

Twierdzenie 4.1 *Niech X i Y będą rozmaitościami rzutowymi, na których działa grupa reduktywna G. Przez L i M oznaczmy szerokie wiązki liniowe linearyzujące działanie grupy G na X i Y odpowiednio. Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem G-niezmienniczym. Niech $L_m = f^*M^{\otimes m} \otimes L$. Dla $m >> 0$ mamy:*

1. *Jeżeli $f(x) = y$ i y jest niestabilny, to x jest niestabilny względem linearyzacji L_m.*
2. *Jeżeli $f(x) = y$ i y jest stabilny, to x jest stabilny względem linearyzacji L_m.*

Rozważany przez nas morfizm spełnia oczywiście założenia tego twierdzenia. Zbadajmy zatem stabilność punktów względem działania $SL(V)$ na przestrzeni krzywych płaskich ustalonego stopnia k.

Twierdzenie 4.2 *Rozważmy działanie $SL(V)$ na $\mathbb{P}^{\binom{k+2}{2}-1}$ jako działanie indukowane na przestrzeni krzywych stopnia k na $(\mathbb{P}^2)^*$. Niech $[C] \in \mathbb{P}^{\binom{k+2}{2}-1}$, wtedy:*

1. *Jeśli wszystkie punkty C mają krotność $< \frac{k}{3}$, to $[C]$ jest punktem stabilnym $\mathbb{P}^{\binom{k+2}{2}-1}$.*
2. *Jeśli C ma punkt krotności $> \frac{2k}{3}$, to jest $[C]$ jest punktem niestabilnym $\mathbb{P}^{\binom{k+2}{2}-1}$.*

Dowód. Załóżmy, że wszystkie punkty na krzywej C są krotności $< \frac{k}{3}$ oraz, że punkt $[C] \in \mathbb{P}^{\binom{k+2}{2}-1}$ jest niestabilny. Z kryterium Hilberta-Mumforda wynika, że istnieje jednoparametrowa podgrupa $\lambda : G_m \to SL(V)$ taka, że $\mu(\lambda, [C]) \leqslant 0$. Pokażemy, że na C jest punkt krotności $\geqslant \frac{k}{3}$. Ustalmy torus maksymalny $T \subset SL(V)$ i wybierzmy współrzędne x_0, x_1, x_2 tak, by działanie torusa na $\mathbb{A}^3$ było diagonalne. Wtedy istnieje takie $\alpha \in SL(V)$, że

$$\alpha\lambda(t)\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} t^{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{r_2} \end{pmatrix}$$

gdzie $r_i \in \mathbb{Z}$, $r_0 \geqslant r_1 \geqslant r_2$, $r_0 + r_1 + r_2 = 0$. Ponadto $r_0 > 0$ i $r_2 < 0$, ponieważ λ jest nietrywialna. Skorzystamy z własności μ, którą można znaleźć w [MF] po definicji 2.2

$$\mu(\alpha\lambda\alpha^{-1}, \alpha[C]) = \mu(\lambda, [C]) \tag{4.1}$$

Oznaczmy $[C'] = \alpha[C]$, $\lambda' = \alpha\lambda\alpha^{-1}$. Zauważmy, że $\lambda'(t)x_i = t^{-r_i}x_i$.Wynika to z faktu, że $x_i \in k[\mathbb{A}^3]$, a na tej algebrze mamy indukowane działanie $SL(V)$ w następujący sposób: $g\phi(v) = \phi(g^{-1}v)$ dla $g \in SL(V)$, $\phi \in k[\mathbb{A}^3]$ i $v \in \mathbb{A}^3$. Zatem

$$\lambda'(t)x_0^{k-(i+j)}x_1^i x_2^j = t^{-(k-(i+j))r_0 - ir_1 - jr_2}x_0^{k-(i+j)}x_1^i x_2^j$$

Niech $F = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} a_{ij}x_0^{k-(i+j)}x_1^i x_2^j$ będzie równaniem krzywej $[C']$. Wtedy

$$\mu(\lambda', [C']) = \max\{(k-(i+j))r_0 + ir_1 + jr_2 : 0 \leqslant i+j \leqslant k, a_{ij} \neq 0\}.$$

Z założenia i z (4.1) mamy $\mu(\lambda', [C']) \leqslant 0$. Chociaż nie znamy dokładnie r_0, r_1 i r_2 to, korzystając z zależności między nimi, dla niektórych par (i, j) możemy oszacować liczbę $(k-(i+j))r_0 + ir_1 + jr_2$. Rozpatrzmy przypadek $i \geqslant j$ oraz $k > 2i + j$.Wtedy:
$(k-(i+j))r_0 + ir_1 + jr_2 = (k-(2i+j))r_0 + i(r_0+r_1+r_2) + (j-i)r_2 = (k-(2i+j))r_0 + (j-i)r_2 > 0$
Jeżeli $i < j$ oraz $n > 3j$, to:
$(k-(i+j))r_0 + ir_1 + jr_2 = (k-(i+2j))r_0 + (i-j)r_1 + j(r_0+r_1+r_2) = (k-(i+2j))r_0 + (i-j)r_1 = (k-3j))r_0 + (i-j)(r_1 - r_0) > 0$

Zatem skoro $\mu(\lambda', [C']) \leqslant 0$, to dla każdych i, j rozpatrywanych w powyższych przypadkach $a_{ij} = 0$. W szczególności mamy to dla $i + j < \frac{k}{3}$ i punkt $[1, 0, 0] \in C'$ jest krotności $\geqslant \frac{k}{3}$. Wnioskujemy z tego, że i na C jest taki punkt. Sprzeczność.

Załóżmy teraz, że na C istnieje punkt krotności krotności $> \frac{2k}{3}$. Wybierzmy takie $\alpha \in SL(V)$, które przeprowadza go na punkt $[1, 0, 0]$. W pierwszej części dowodu najpierw wybraliśmy jednoparametrową podgrupę λ i do niej dobraliśmy α. Teraz postępujemy odwrotnie: możemy wybrać taką jednoparametrową podgrupę λ, że $r_0 = 2$, $r_1 = r_2 = -1$. Pozostając przy wcześniej wprowadzonych oznaczeniach pokażemy, że $\mu(\lambda, [C]) = \mu(\lambda', [C']) < 0$. Punkt $[1, 0, 0] \in C'$ ma krotność $> \frac{2k}{3}$ więc $a_{ij} = 0$ dla $i + j \leqslant \frac{2k}{3}$. Zatem

$$\mu(\lambda', [C']) = \max\{(k-(i+j))2 - i - j : 0 \leqslant i+j \leqslant k, a_{ij} \neq 0\} = \max\{(2k - 3(i+j) : 0 \leqslant i+j \leqslant k, a_{ij} \neq 0\} < 0$$

Z kryterium Hilberta-Mumforda stwierdzamy, że $[C]$ jest punktem niestabilnym.

□

Uwagi.

1. Udowodniliśmy, że gładka krzywa stopnia $k \geqslant 4$ jest punktem stabilnym. Mumford w [MF] udowodnił to dla $k \geqslant 3$.

2. Powyższa twierdzenie pokazuje, że jeśli wszystkie punkty krzywej stopnie k mają krotność $\leqslant 2$, to krzywa ta jest stabilna dla $k \geqslant 7$. Jeżeli założymy, że są to osobliwości będące pętlami to uzyskujemy stabilność dla $k \geqslant 4$. Dowód przebiega analogicznie - wystarczy zauważyć, że $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{11} = 0$ i rozważyć dwa przypadki: $a_{02} = 0$ i $a_{02} \neq 0$. Stwierdzamy, że $[1, 0, 0] \in C'$ jest punktem krotności $\geqslant 3$ lub jest to punkt krotności 2 typu będący ostrzem i dostajemy sprzeczność dowodzącą stabilności C.

Karnik (zob. [Ka],Twierdzenie 20) używając twierdzeń 4.1 i 4.2 oraz morfizmu Bartha udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.3 *Niech F będzie semistabilną wiązką wektorową taką, że $[F] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,0,n)$, gdzie $n \geqslant 3$. Załóżmy, że istnieje prosta $L \subset \mathbb{P}^2$ taka, że $F_{|L} = \mathcal{O}(d) \oplus \mathcal{O}(-d)$ gdzie $d > \frac{2n}{3}$. Wtedy $[F]$ jest punktem niestabilnym ze względu na odpowiednio zlinearyzowane działanie $SL(V)$ na $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,0,n)$. Ponadto zbiór punktów stabilnych $(\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,0,n))^s$ tego działania jest otwarty i niepusty.*

Możemy teraz udowodnić twierdzenie analogiczne do wyniku Karnika w przypadku gdy $c_1 = -1$:

Twierdzenie 4.4 *Niech F będzie stabilną wiązką wektorową taką, że $[F] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ gdzie $n \geqslant 2$. Załóżmy, że istnieje prosta $L \subset \mathbb{P}^2$ taka, że $F_{|L} = \mathcal{O}(d) \oplus \mathcal{O}(-d-1)$ gdzie $d > \frac{2(n-1)}{3}$. Wtedy $[F]$ jest punktem niestabilnym ze względu na odpowiednio zlinearyzowane działanie $SL(V)$ na $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$. Ponadto, jeśli $n \geqslant 3$ to zbiór punktów stabilnych $(\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n))^s$ tego działania jest otwarty i niepusty.*

Dowód. Niech $L \subset \mathbb{P}$ taka, że $F_{|L} = \mathcal{O}(d) \oplus \mathcal{O}(-d-1)$ gdzie $d > \frac{2(n-1)}{3}$. Hulek w [Hu] pokazał, że w takim przypadku l jest punktem krotności $2d$ na krzywej prostych skoku drugiego typu D_F, która ma stopień $2n-2$. Nierówność $d > \frac{2(n-1)}{3}$ zapisana w postaci $2d > \frac{2(2n-2)}{3}$ i twierdzenie 4.2 pozwala nam stwierdzić, że $[D_F]$ jest punktem niestabilnym. Na mocy twierdzenia Reichsteina F jest także punktem niestabilnym przy odpowiedniej linearyzacji, o której mowa w twierdzeniu. Załóżmy, teraz, że $n \geqslant 3$. Przestrzeń moduli $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ jest nierozkładalna zatem aby pokazać, że zbiór punktów stabilnych jest niepusty wystarczy wskazać jeden taki punkt. W poprzednim rozdziale wskazaliśmy takie wiązki Hulsbergena, których krzywe prostych skoku drugiego typu mają dokładnie $\binom{n}{2}$ punktów osobliwych i wszystkie te punkty są pętlami krotności 2. Stopień tych krzywych jest równy $2n-2 \geqslant 4$, zatem na mocy uwag po twierdzeniu 4.2 krzywa $[D_F]$ dla takiej wiązki jest punktem stabilnym. Punkt $[F] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2,-1,n)$ jest więc także stabilny.

□

Uwagi. Gdy $n = 2$ każda wiązka wektorowa F ma dokładnie jedną prostą skoku. Krzywa prostych skoku drugiego typu składa się z dwóch różnych prostych w $(\mathbb{P}^2)^*$ przecinających się w jednym punkcie odpowiadającym prostej skoku. Jest to krzywa niestabilna, więc wszystkie takie wiązki wektorowe są niestabilne.

Rozdział 5

Działanie $SL(3)$ na przestrzeni moduli snopów semistabilnych

W tym rozdziale opiszemy konstrukcję przestrzeni moduli $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ podaną przez Le Potier w [LP2]. Opiera się ona na możliwości przedstawiania snopów jako kohomologii monad. Podamy także kryterium na niestabilność punktów przestrzeni moduli $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ względem działania $SL(V)$.

Definicja 5.1 Monadą *nazywamy kompleks snopów*

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0,$$

który jest dokładny w E_1 *oraz* E_3.

Mamy następujące twierdzenie Beilinsona [Be]:

Twierdzenie 5.1 *Niech* F *będzie unormowanym snopem semistabilnym na* $\mathbb{P}^2$ *rangi* r *z klasami Cherna* c_1 *i* c_2. *Istnieje kompleks*

$$0 \longrightarrow H^1(F(-2)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{u} H^1(F(-1)) \otimes \Omega(1) \xrightarrow{v} H^1(F) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow 0\,,$$

który jest monadą. Ponadto jej środkowa kohomologia jest izomorficzna z F.

Ustalmy sobie snop F taki jak w powyższym twierdzeniu. Niech

$$n = c_2 - \frac{1}{2}c_1(c_1+1)\,,$$

oraz $H = H^1(F(-1))$, $P = H^1(F(-2))$, $Q = H^1(F)$. Wtedy $\dim H = n$, $\dim P = n + c_1$, $\dim Q = n - (r + c_1)$. Dzięki monadzie Beilinsona oraz naturalnym utożsamieniom

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}(P \otimes \mathcal{O}(-1), H \otimes \Omega(1)) &= \operatorname{Hom}(P, H \otimes V)\,, \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}(H \otimes \Omega(1), Q \otimes \mathcal{O}) &= \operatorname{Hom}(H \otimes V^*, Q)\,, \end{aligned}$$

możemy traktować P jako podprzestrzeń wymiaru $n + c_1$ przestrzeni $H \otimes V$, natomiast Q jako przestrzeń ilorazową wymiaru $n - (r + c_1)$ przestrzeni $H \otimes V^*$. Ponadto przekształcenia te odpowiadają mnożeniom:

$$\begin{gathered} H^1(F(-2)) \otimes V^* \longrightarrow H^1(F(-1)) \\ H^1(F(-1)) \otimes V^* \longrightarrow H^1(F)\,. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Odwrotnie, ustalmy najpierw $n-$wymiarową przestrzeń wektorową H. Połóżmy

$$\mathfrak{B}(r, c_1, c_2) = \mathrm{Grass}_{n+c_1}(H \otimes V) \times \mathrm{Grass}^{n-(r+c_1)}(H \otimes V^*),$$

gdzie pierwszy czynnik to grassmannian podprzestrzeni wymiaru $n + c_1$, a drugi czynnik to grassmannian przestrzeni ilorazowych wymiaru $n - (r + c_1)$. Punktowi $(P, Q) \in \mathfrak{B}(r, c_1, c_2)$ możemy przyporządkować przekształcenia

$$P \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{u} H \otimes \Omega(1) \xrightarrow{v} Q \otimes \mathcal{O}. \tag{5.2}$$

Niech $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ będzie domkniętym podschematem rozmaitości $\mathfrak{B}(r, c_1, c_2)$ danym równaniem $vu = 0$. Grupa Picarda $\mathfrak{B}(r, c_1, c_2)$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}^2$. Jej generatorami są wiązki liniowe indukowane z $\mathcal{O}(1)$ przy zanurzeniu każdego z grassmanianów w przestrzeń rzutową przy pomocy zanurzenia Plückera.

Twierdzenie 5.2 *Rozpatrzmy działanie $SL(H)$ na $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ z linearyzacją daną przez $\mathcal{O}((r + c_1)m - n, -c_1 m + n)$. Dla $m >> 0$ zachodzi:*

- *Jeżeli $(P, Q) \in \mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ jest semistabilnym punktem ze względu na to działanie, to kompleks (5.2) jest monadą, której środkowa kohomologia jest snopem semistabilnym rangi r z klasami Cherna c_1 i c_2.*

- *Niech $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)^{ss}$ będzie otwartym podzbiorem $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ złożonym z punktów semistabilnych. Mamy izomorfizm*

$$\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)^{ss}/SL(H) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2).$$

Na $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ możemy rozpatrzeć działanie grupy $SL(H) \times SL(V)$. Snop $\mathcal{O}((r + c_1)m - n, -c_1 m + n)$ linearyzuje także to działanie. Przyjmijmy konwencję, że wypisując teraz podzbiory punktów niestabilnych lub semistabilnych przez dopisanie po nim nazwy grupy będziemy zaznaczać względem której grupy rozpatrujemy stabilność. Niech $\pi : \mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)^{ss}(SL(H)) \to \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ będzie przekształceniem ilorazowym. Wtedy na $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ dostajemy szeroką wiązkę liniową E_m taką, że

$$\pi^*(E_m) = (\mathcal{O}((r + c_1)m - n, -c_1 m + n))^{\otimes k}_{|\mathfrak{Mon}(r,c_1,c_2)^{ss}(SL(H))}$$

dla pewnego $k > 0$. Ponadto E_m linearyzuje działanie $SL(V)$ na $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$. Niech

$$U = \mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)^{un}(SL(H) \times SL(V)) \cap \mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)^{ss}(SL(H)).$$

Wtedy ze stwierdzenia 14 w [Ka] mamy $\pi(U) = \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)^{un}(SL(V))$. Zamiast wyznaczania zbioru $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)^{un}(SL(H) \times SL(V))$ łatwo możemy znaleźć jego podzbiór $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)^{un}(SL(V))$.

Przyjmijmy następujące oznaczenia. Dla podprzestrzeni $V' \subset V$ i punktu $(P, Q) \in \mathfrak{B}(r, c_1, c_2)$ definiujemy $P' = P \cap (H \otimes V)$. Niech W^* będzie jądrem surjekcji $V^* \to V'^*$. Kojądro przekształcenia $H \otimes W^* \to Q$ oznaczamy przez Q'.

Lemat 5.3 (por. wniosek 29 w [Ka]) *Niech $SL(H) \times SL(V)$ działa na $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ z linearyzacją $\mathcal{O}(p, q)$. Punkt $(P, Q) \in \mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ jest niestabilny względem indukowanego działania grupy $SL(V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podprzestrzeń $V' \subset V$ taka, że*

$$\frac{p \dim P' + q \dim Q'}{\dim V'} > \frac{p \dim P + q \dim Q}{\dim V}$$

Wniosek 5.4 *Rozpatrzmy działanie* $SL(H) \times SL(V)$ *na* $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ *z linearyzacją* $\mathcal{O}((r+c_1)m - n, -c_1 m + n)$ *dla ustalonego* $m >> 0$. *Niech* $(P, Q) \in \mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$. *Załóżmy, że istnieje podprzestrzeń dwuwymiarowa* $V' \subset V$ *taka, że*

$$(r+c_1)\dim P' - c_1 \dim Q' > \frac{2}{3}\left(rn + 2c_1^2 + 2rc_1\right) \tag{5.3}$$

Wtedy (P, Q) *jest punktem niestabilnym względem indukowanego działania grupy* $SL(V)$.

Dowód. Zbadamy różnicę

$$p\dim P' + q\dim Q' - \frac{\dim V'}{\dim V}(p\dim P + q\dim Q) \tag{5.4}$$

dla $p = (r+c_1)m - n$, $q = -c_1 m + n$ i danego w założeniach V'. Przedtem jednak zauważmy, że z nierówności (5.3) wynika, że

$$(r+c_1)\dim P' - c_1 \dim Q' - \frac{2}{3}\left(rn + 2c_1^2 + 2rc_1\right) \geqslant \frac{1}{3}$$

Po podstawieniu odpowiednich zmiennych i po uporządkowaniu, różnica (5.4) wynosi

$$m\left((r+c_1)\dim P' - c_1\dim Q' - \tfrac{2}{3}(rn + 2c_1^2 + 2rc_1) + \tfrac{n}{m}\left(\dim Q' - \dim P' + \tfrac{2}{3}(r + 2c_1)\right)\right) \geqslant$$
$$\geqslant m\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{n}{m}\left(\dim Q' - \dim P' + \tfrac{2}{3}(r+2c_1)\right)\right)$$

Wartość $n\left(\dim Q' - \dim P' + \frac{2}{3}(r+2c_1)\right)$ możemy oszacować z góry i z dołu dla wszystkich punktów $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ jednocześnie. Zatem dla $m >> 0$ mamy

$$\frac{n}{m}\left(\dim Q' - \dim P' + \frac{2}{3}(r+2c_1)\right) < \frac{1}{3}$$

i badana różnica jest dodatnia. Na mocy lematu (5.3) stwierdzamy, że punkt (P, Q) jest niestabilny względem indukowanego działania grupy $SL(V)$.

$\square$

Twierdzenie 5.5 *Niech* F *będzie semistabilnym snopem takim, że* $[F] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$. *Ustalmy* $m >> 0$. *Jeżeli istnieje prosta* $L \subset \mathbb{P}^2$ *taka, że*

$$(r+c_1)h^0\left(F(-1)_{|L}\right) - c_1 h^1\left(F_{|L}\right) > \frac{2}{3}\left(rn + 2c_1^2 + 2rc_1\right), \tag{5.5}$$

to $[F]$ *jest punktem niestabilnym ze względu na działanie* $SL(V)$ *na* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ *z linearyzacją* E_m.

Dowód. Załóżmy, że $L \subset \mathbb{P}^2$ spełnia założenia twierdzenia. Niech (P, Q) będzie punktem $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)^{ss}$, który definiuje F. Wystarczy pokazać, że punkt (P, Q) jest niestabilny przy działaniu $SL(V)$ na $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ z linearyzacją $\mathcal{O}((r+c_1)m - n, -c_1 m + n)$. Wykażemy to posługując się wnioskiem (5.4). Prosta L definiuje nam dwuwymiarową podprzestrzeń $V' \subset V$. Twierdzimy, że $\dim P' = h^0\left(F(-1)_{|L}\right)$ oraz $\dim Q' = h^1\left(F_{|L}\right)$. Rozważmy dwa ciągi

$$0 \longrightarrow F(-2) \longrightarrow F(-1) \longrightarrow F(-1)_{|L} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow F(-1) \longrightarrow F \longrightarrow F_{|L} \longrightarrow 0$$

Wiedząc, że $h^0(F(-1)) = h^0(F) = h^2(F(-2)) = h^2(F(-1)) = 0$ (zob. lemat (1.1)) mamy:

$$0 \longrightarrow H^0\left(F(-1)_{|L}\right) \longrightarrow P \xrightarrow{\phi_L} H \longrightarrow H^1\left(F(-1)_{|L}\right) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^0\left(F_{|L}\right) \longrightarrow H \xrightarrow{\psi_L} Q \longrightarrow H^1\left(F_{|L}\right) \longrightarrow 0$$

Przekształcenia ϕ_L i ψ_L są mnożeniem (5.1) przez element $l \in V^*$ odpowiadający prostej L. Mnożenia te dawały nam injekcję $P \hookrightarrow H \otimes V$ oraz surjekcję $H \otimes V^* \twoheadrightarrow Q$. Niech $p \in P$. Przedstawmy go w postaci $p = \sum h_i \otimes v_i$. Wtedy $\phi_L(p) = \sum l(v_i) h_i$. Zatem jeżeli ponadto wiemy, że $p \in P' = P \cap H \otimes V'$ to $\phi_L(p) = 0$ bo l anihiluje V'. Stwierdzamy więc, że $P' \subset H^0\left(F(-1)_{|L}\right)$. Przestrzeń $H^0\left(F(-1)_{|L}\right)$ traktujemy oczywiście jako podprzetrzeń P. Załóżmy, że $\phi_L(p) = 0$. Wektor p możemy przedstawić w postaci $p = h_1 \otimes v_1 + h_2 \otimes v_2 + h_3 \otimes v_3$ gdzie $v_1, v_2 \in V'$. Z założenia wiemy, że $l(v_3) h_3 = 0$ zatem $v_3 \in V'$ lub $h_3 = 0$. Stwierdzamy więc, że także $H^0\left(F(-1)_{|L}\right) \subset P'$. Mamy zatem $P' = H^0\left(F(-1)_{|L}\right)$. Podobnie postępujemy dla ψ_L. Zauważmy, że $l \in V^*$ generuje wcześniej zdefiniowane W^* (por. sposób określenia Q'). Zatem kojądrem przekształcenia ψ_L jest Q'. Mamy więc $Q' = H^1\left(F_{|L}\right)$. To kończy dowód.

□

Uwagi. Jeżeli $F_{|L} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(d_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^p C_i$, gdzie C_i są snopami strukturalnymi punktu, to proste obliczenia dają nam

$$\begin{aligned} h^0\left(F(-1)_{|L}\right) &= \sum_{d_i>0} d_i + p \\ h^1\left(F_{|L}\right) &= \sum_{d_i<-1} (-d_i - 1) \end{aligned}$$

Dla unormowanych wiązek wektorowych rangi 2 kryterium na niestabilność z powyższego twierdzenia jest identyczne jak to w twierdzeniach (4.3) i (4.4).

Wskażemy teraz przykłady wiązek wektorowych rangi $r \geqslant 2$ z pierwszą klasą Cherna równą 0 lub -1, które są $SL(V)-$niestabilne. Niech F będzie unormowaną stabilną wiązką wektorową rangi 2 spełniającą dla pewnej prostej $L \subset \mathbb{P}^2$ warunek

$$h^0\left(F(-1)_{|L}\right) > \frac{2}{3}\left(c_2(F) + c_1(F)\right) \tag{5.6}$$

Równoważnie $F_{|L} = \mathcal{O}(-d + c_1(F))_{|L} \oplus \mathcal{O}(d)_{|L}$ gdzie $d > \frac{2}{3}(c_2(F) + c_1(F))$. Przykłady takich wiązek możemy znaleźć wśród wiązek Hulsbergena tak jak to zostało opisane w rozdziale 3. Przyjmijmy oznaczenie $c_i = c_i(F)$. Ze stabilności F wynika, że $2 \leqslant c_1 + c_2$ (por.[LP1], stwierdzenie 9.1.3 oraz 9.1.4). Zauważmy ponadto, że

$$h^1\left(F_{|L}\right) = h^0\left(F(-1)_{|L}\right) - c_1 - 1$$

więc nierówność (5.6) jest równoważna nierówności (5.5). Zatem dla $m >> 0$ punkt $[F] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(2, c_1, c_2)$ jest niestabilny względem działania $SL(V)$ z linearyzacją E_m. Niech $S_2(F)$ oznacza jednoelementowy zbiór zawierający F. Dla $r > 2$ definiujemy $S_r(F)$ jako zbiór wszystkich snopów, będących nietrywialnym rozszerzeniem $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ przez jakiś snop $F_{r-1} \in S_{r-1}(F)$. Oczywiście każdy snop $F_r \in S_r(F)$ jest lokalnie wolny rangi r z $c_1(F_r) = c_1$, $c_2(F_r) = c_2$. Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia Langera (por. [La], stwierdzenie 6.2), którego sposób dowodu powtarzamy.

Twierdzenie 5.6 *Zbiór $S_r(F)$ jest niepusty wtedy i tylko wtedy, gdy $r \leqslant c_2 - c_1$. Jeżeli $S_r(F)$ jest niepusty to dla każdego $F_r \in S_r(F)$ zachodzi:*

(a) Jeżeli $c_1 = 0$, to F_r jest stabilny.

(b) Jeżeli $c_1 = -1$, to F_r jest $\mu-$stabilny.

(c) F_r spełnia nierówność (5.5).

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. W przypadku $r = 2$ wszystkie tezy twierdzenia są prawdziwe na mocy założenia o F. Załóżmy, że tezy twierdzenia są prawdziwe dla rangi mniejszej niż r. Najpierw zauważmy, że $\operatorname{ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, F) = h^1(F) = c_2 - 2 - c_1$. Niech $F_{r-1} \in S_{r-1}(F)$. Mamy następujący ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-3} \longrightarrow 0. \tag{5.7}$$

Skoro F_{r-1} jest stabilny to $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, F_{r-1}) = H^0(F_{r-1}) = 0$. Przykładając funktor $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \cdot)$ do ciągu (5.7) dostajemy

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-3}\right) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, F) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, F_{r-1}) \longrightarrow 0$$

Mamy więc $\operatorname{ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, F_{r-1}) = c_2 - 2 - c_1 - r + 3 = c_2 - c_1 - r + 1$ i $S_r(F)$ jest niepusty wtedy i tylko wtedy gdy $r \leqslant c_2 - c_1$. Ponadto postępując podobnie dla ciągu $0 \to F_{r-1} \to F_r \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to 0$ otrzymujemy ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, F_r) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, F_{r-1}).$$

Braliśmy tylko nierozszczepialne rozszerzenia więc ostatnie przekształcenie jest niezerowe, skąd mamy $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, F_r) = H^0(F_r) = 0$.

Teraz dowiedziemy stabilności F_r. Na mocy uwag po lemacie 1.2.12 w [OSS] aby to zrobić wystarczy wykazać, że dla dowolnego snopa $G \subset F_r$ takiego, że $0 < \operatorname{rk} G < \operatorname{rk} F_r$ oraz F_r/G jest beztorsyjne zachodzi $p_G < p_{F_r}$. Zauważmy, że skoro F_r/G jest beztorsyjne, to G jest wiązką wektorową. Możemy ponadto założyć, że wiązka G jest stabilna. Rozpatrzmy następujące przypadki.

1. $\mu(G) < 0$. Wtedy $\mu(G) \leqslant -\frac{1}{r-1} < -\frac{1}{r} \leqslant \mu(F_r)$.

2. $\mu(G) > 0$. Skorzystamy z ciągu $0 \to F \to F_r \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-2} \to 0$. Przez ϕ oznaczmy złożenie przekształceń $G \to F_r \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-2}$. Ponieważ $\mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-2}) = 0$ wiemy, że ϕ jest zerowe i $G \subset F$. Ze stabilności F mamy $\mu(G) \leqslant \mu(F) \leqslant 0$. Sprzeczność.

3. $\mu(G) = 0$. Jeżeli $\phi = 0$ to postępujemy jak w poprzednim przypadku. Możemy więc założyć, że $\operatorname{im}\phi \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-2}$ jest nietrywialnym snopem beztorsyjnym. Wtedy $\ker\phi \subset F$ jest wiązką wektorową rangi 0, 1 lub 2.

   (a) $\operatorname{rk}(\ker\phi) = 0$.Wtedy G jest izomorficzne z $\operatorname{im}\phi$, więc mamy włożenie $G \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-2}$. Zatem G^* jest globalnie generowana i $c_1(G^*) = 0$. Na mocy wniosku z twierdzenia 3.2.1 w [OSS] stwierdzamy, że $G^* = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{l}$ dla pewnego $0 < l \leqslant r - 2$. Zatem także $G = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{l}$. Założyliśmy, że G jest stabilna więc $G = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ i dostajemy sprzeczność z $H^0(F_r) = 0$.

   (b) $\operatorname{rk}(\ker\phi) = 1$. Ze stabilności F mamy $\mu(\ker\phi) \leqslant 0$. Z drugiej strony także $\mu(\operatorname{im}\phi) \leqslant 0$ więc $\mu(\ker\phi) \geqslant 0$. Ostatecznie $\ker\phi = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ i dostajemy sprzeczność z $H^0(F) = 0$.

(c) $\operatorname{rk}(\ker\phi) = 2$. Tak samo jak poprzednio pokazujemy $\mu(\ker\phi) = 0$ oraz $\mu(\operatorname{im}\phi) = 0$. Jeżeli $c_1 = -1$ to dostajemy sprzeczność. W przeciwnym wypadku $\ker\phi = F$. Założyliśmy, że F_r/G jest beztorsyjny. Dzięki następującemu diagramowi

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & G \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{im}\phi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & F_r \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & F_r/G \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-2}/\operatorname{im}\phi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

stwierdzamy, że $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{r-2}/\operatorname{im}\phi$ także jest beztorsyjny. Zatem $\operatorname{im}\phi$ jest lokalnie wolny i tak jak w (3a) stwierdzamy, że $\operatorname{im}\phi = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{l}$ dla jakiegoś $0 < l < r-2$. Mamy więc ciąg

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{l} \longrightarrow 0,$$

który pozwala nam stwierdzić, że $p_G = p_{F_{l+2}} < p_{F_r}$, gdzie F_{l+2} jest dowolnym elementem $S_{l+2}(F)$.

Jeżeli $c_1 = -1$, to założenie $\mu(G) \geqslant 0$ zawsze prowadziło do sprzeczności. W przypadku $\mu(G) < 0$ pokazaliśmy, że zachodzi $\mu(G) < \mu(F_r)$. To dowodzi $\mu-$stabilności F_r dla $c_1 = -1$.

Do końca dowodu pozostało jeszcze wykazanie, że różnica

$$(r + c_1)\, h^0\left(F_r\,(-1)_{|L}\right) - c_1 h^1\left(F_{r|L}\right) - \frac{2}{3}\left(rn + 2c_1^2 + 2rc_1\right) \tag{5.8}$$

jest dodatnia. Zwróćmy uwagę, że dla $c_1 \in \{-1, 0\}$ zachodzi $n = c_2$. Ponadto z ciągu

$$0 \longrightarrow F_{r-1}(-1)_{|L} \longrightarrow F_r(-1)_{|L} \longrightarrow \mathcal{O}_L(-1) \longrightarrow 0$$

dostajemy $h^0\left(F_{r-1}\,(-1)_{|L}\right) = h^0\left(F_r\,(-1)_{|L}\right)$. Z morfizmu krótkich ciągów dokładnych

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & F_{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & F_r \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & F_{r-1|L} \arrow[r] & F_{r|L} \arrow[r] & \mathcal{O}_L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mamy następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & H^0\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\right) \arrow[r] \arrow[d] & H^1\left(F_{r-1}\right) \arrow[r] \arrow[d] & H^1\left(F_r\right) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \arrow[d] \\
H^0\left(F_{r|L}\right) \arrow[r] & H^0\left(\mathcal{O}_L\right) \arrow[r] & H^1\left(F_{r-1|L}\right) \arrow[r] & H^1\left(F_{r|L}\right) \arrow[r, "\beta"] & H^1\left(\mathcal{O}_L\right)
\end{tikzcd}.$$

Przekształcenie α jest surjekcją gdyż jego kojądrem jest $H^2(F_r(-1)) = 0$. Zatem $\beta = 0$ i możliwe są dwa przypadki: albo mamy krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_L) \longrightarrow H^1\left(F_{r-1|L}\right) \longrightarrow H^1\left(F_{r|L}\right) \longrightarrow 0$$

albo $H^1\left(F_{r-1|L}\right) \simeq H^1\left(F_{r|L}\right)$. Zatem dostajemy oszacowanie $h^1\left(F_{r-1|L}\right) - h^1\left(F_{r|L}\right) \leqslant 1$.

Wyrażenie (5.8) przepisujemy wykorzystując udowodnione zależności i szacujemy używając kolejno założenia indukcyjnego oraz założenia (5.6)

$$((r-1)+c_1)\,h^0\left(F_{r-1}(-1)_{|L}\right) - c_1 h^1\left(F_{r-1|L}\right) - \tfrac{2}{3}\left((r-1)n + 2c_1^2 + 2(r-1)c_1\right) +$$
$$+h^0\left(F_r(-1)_{|L}\right) + c_1\left(h^1\left(F_{r-1|L}\right) - h^1\left(F_{r|L}\right)\right) - \tfrac{2}{3}(n+2c_1) >$$
$$> h^0\left(F(-1)_{|L}\right) + c_1 - \tfrac{2}{3}(n+2c_1) = h^0\left(F(-1)_{|L}\right) - \tfrac{2}{3}(n+c_1) + \tfrac{1}{3}c_1 \geqslant \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}c_1 \geqslant 0.$$

To kończy dowód.

□

Korzystając z twierdzenia (5.5) dostajemy

Wniosek 5.7 *Dla $m >> 0$ i dla każdego $F_r \in S_r(F)$ punkt $[F_r] \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r, c_1, c_2)$ jest niestabilny względem działania $SL(V)$ z linearyzacją E_m.*

Uwagi. Karnik w [Ka] podał twierdzenie, które mówiło, że $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r,0,c_2)^s$ jest niepusty dla linearyzacji E_m i $m >> 0$. Niestety jego dowód zawiera szereg błędów. Po pierwsze nie wyjaśnia dokładnie jak otrzymuje stabilny punkt w $\mathfrak{Mon}(2,0,c_2)$ ze względu na działanie $SL(H) \times SL(V)$ z linearyzacją $\mathcal{O}(2m - c_2, c_2)$. To prawda, że $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^2}(r,0,c_2)^s$ jest niepusty przy linearyzacji L_m opisanej w twierdzeniu (4.1). Dzięki temu twierdzeniu umiemy też coś powiedzieć o stabilności względem linearyzacji $\mathcal{O}(2m_1 - c_2, c_2) \otimes \pi^*(L_{m_2})^{\otimes k}$ dla $k >> 0$ na $\mathfrak{Mon}(r,0,c_2)$. Ale my chcemy wykorzystać linearyzację $\mathcal{O}(2m - c_2, c_2)$. Następny etap dowodu to krok indukcyjny. Przy założeniu, że snop G daje stabilny punkt $P(G), Q(G) \in \mathfrak{Mon}(r-1,0,c_2)$ Karnik twierdzi, że jeśli $0 \to G \to F \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to 0$ jest nierozszczepialnym rozszerzeniem to punkt $(P(F), Q(F)) \in \mathfrak{Mon}(r,0,c_2)$ jest także punktem stabilnym ze względu działanie $SL(H) \times SL(V)$ z linearyzacją $\mathcal{O}(rm - c_2, c_2)$. Aby tego dowieść ustala on sobie $1-$parametrową podgrupę $\lambda \subset SL(H) \times SL(V)$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że dla $m >> 0$

$$\mu_m((P(G), Q(G)), \lambda) = ((r-1)m - c_2)\,\mu(P(G), \lambda) - n\mu(Q(G), \lambda) > 0,$$

gdzie $\mu(P(G), \lambda)$ i $\mu(Q(G), \lambda)$ pochodzą od działania $SL(H) \times SL(V)$ na odpowiednich grassmanianach z linearyzacją $\mathcal{O}(1)$. Karnik stwierdza, że zatem $\mu(P(G), \lambda) > 0$. Błąd! Dostajemy oszacowanie tylko nieostre. Idźmy jednak dalej. Łatwo można pokazać, że $\mu(P(G), \lambda) = \mu(P(F), \lambda)$, ale nie wiemy jak dokładnie wygląda zależność między $\mu(Q(G), \lambda)$ i $\mu(Q(F), \lambda)$. Karnik próbował to ominąć w ten sposób, że jeśli wiemy, że $\mu(P(G), \lambda) > 0$ to dla $m >> 0$

$$\mu_m((P(F), Q(F)), \lambda) = (rm - c_2)\,\mu(P(F), \lambda) - n\mu(Q(F), \lambda) > 0.$$

Niestety oprócz wspomnianego wcześniej błędu nie dostajemy żadnego szacowania na m. Aby dostać stabilność punktu $(P(F), Q(F)$ musielibyśmy znaleźć takie m, które jest dobre dla wszystkich $1-$parametrowych podgrup jednocześnie. Pozostaje jednak nadzieja, że dokładniejsza analiza działania $SL(H) \times SL(V)$ na $\mathfrak{Mon}(r, c_1, c_2)$ pozwoli na rozstrzygnięcie czy twierdzenie podane przez Karnika jest w rzeczywistości prawdziwe.

Bibliografia

[Ba1] W. Barth, *Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}_n$*, Math. Ann. **226** (1976), 125-150.

[Ba2] W. Barth, *Moduli of vector bundles on the projecive plane*, Invent. Math. **42** (1977), 63-91.

[Be] A.A. Beilinson, *Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problems in linear algebra*, Funkt. Analiz. Appl. **12** (3) (1978), 68-69.

[Do] I. Dolgachev, *LMS Lectures on invariant theory*, Lecture Notes Series **296**, 2003.

[EGA] A. Grothendieck, *Eléments de Géometrie Algébrique III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Ibid. **11** (1961), **17** (1963).

[Ha1] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, 1977.

[Ha2] R. Hartshorne, *Stable reflexive sheaves*, Math, Ann. **254** (1980), 121-176.

[Hb] W. Hulsbergen, *Vector bundles on the projective plane*, Proefschrift, Leiden, 1976.

[HL] Huybrechts, D., Lehn, M. *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of Mathematics **31**, 1997

[Hu] K. Hulek, *Stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}_2$ with c_1 odd*, Math. Ann. **242** (1979), 241-266.

[Ka] S. Karnik, *Group actions on vector bundles on the projective plane*, arXiv preprint math.AG/0204223.

[La] A. Langer, *Moduli spaces and Castelnuovo-Mumford regularity of sheaves on surfaces*, preprint, Marzec 2004.

[LP1] J. Le Potier, *Lectures on vector bundles*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **54**, 1997

[LP2] J. Le Potier, *A propos de la construction de l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif*, Bull. Soc. math. France **122** (1994), 363-369.

[Ma] M. Maruyama, *Singularities of the curves of jumping lines of a vector bundle of rank 2 on $\mathbb{P}^2$*, Lecture Notes in Mathematics **1016**, 370-411.

[Mu] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Annals of Math. Studies **59**, Princeton University Press, 1966.

[MF] D. Mumford, J. Fogarty *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **34**, Second Enlarged Edition, 1982.

[OSS] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics **3**, 1980.

[Re] Z. Reichstein, *Stability and equivariant maps*, Invent. Math. **96** (1989), 349-383.

[St] S.A. Strømme, *Ample divisors on fine moduli spaces on the projective plane*, Math. Z. **187** (1984), 405-423.