Geometria Diofantyczna: egzamin pisemny

Do egzaminu ustnego proszę o przygotowanie na kartkach rozwiązań co najmniej 3 zadań.

Zad. 1.

Z liczbą niewymierną $x \in \mathbb{R}$ stowarzyszamy ciągi $a_0 = [x]$, $x_0 = x$, $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$, $a_{n+1} = [x_{n+1}]$. Pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała $c(\alpha) > 0$ że

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^2}$$

dla wszystkich liczb wymiernych $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Zad. 2.

Niech $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ ma stopień $d \geq 2$. Znaleźć taką stała $c(\alpha) > 0$ zależną tylko od wysokości α, że

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^d}$$

dla wszystkich liczb wymiernych $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Zad. 3.

Niech $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ będzie przekształceniem (wymiernym) danym wzorem $\varphi([x, y, z]) = [x^2, y^2, xz]$.

1. Niech $P = [a, b, c] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze. Pokazać, że

$$h(\varphi(P)) = \log \max\{|a|^2, |b|^2, |ac|\} - \log\{\gcd(a, b^2)\}.$$

2. Pokazać, że zbiór

$$\left\{\frac{h(\varphi(P))}{h(P)} : P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}),\, h(P) \neq 0\right\}$$

jest gęsty w przedziale $[1, 2]$.

Zad. 4.

Niech $C/\mathbb{Q}$ będzie gładką krzywą rzutową, która na pewnej części afinicznej jest zadana wzorem $2y^2 = x^4 - 17$. Pokazać, że $C(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset$ dla wszystkich waluacji v, ale $C(\mathbb{Q}) = \emptyset$. (Uwaga: osoby mające kłopoty z GA mogą ograniczyć się do przypadku afinicznego, ale wtedy należy uważać co się dowodzi!).

Zad. 5.

Niech K będzie ciałem liczbowym i $R_S \in K$ pierścieniem liczb S-całkowitych dla skończonego pewnego zbioru wartości bezwzględnych S zawierającego archimedesowe wartości bezwzględne. Niech $f \in K[x]$ będzie wielomianem stopnia ≥ 2 z parami różnymi pierwiastkami w $\bar{K}$. Niech $n \geq 3$. Pokazać, że równanie $y^n = f(x)$ ma tylko skończenie wiele rozwiązań $x, y \in R_S$.