Metryzacja struktur zgrubnych i hiperbolizacja przestrzeni metrycznych

Aleksander Jankowski

15 marca 2007

1 Metryzacja struktur zgrubnych

Podczas poprzednich referatów wprowadziliśmy pojęcie struktury zgrubnej. Pokazaliśmy także, jak w naturalny sposób określić strukturę zgrubną na dowolnej przestrzeni metrycznej oraz na przestrzeni topologicznej z ustalonym uzwarceniem. W dalszej części będziemy badać związki między tymi strukturami zgrubnymi. Wpierw jednak przypomnijmy kilka definicji.

Definicja 1.1. Strukturą zgrubną na X nazywamy zbiór $\mathcal{E}$, którego elementami są podzbiory $X \times X$, zawierający przekątną $\Delta_X = \{(x,x) \colon x \in X\}$ oraz zamknięty ze względu na branie podzbiorów, odwrotności, produktów i skończonych sum. Elementy zbioru $\mathcal{E}$ nazywamy *zbiorami kontrolowanymi*.

Fakt 1.2. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X \colon \sup\{d(x,x') \colon (x,x') \in E\} < +\infty\}$$

jest strukturą zgrubną na zbiorze X.

Definicja 1.3. Powyższy zbiór $\mathcal{E}$ nazywamy *ograniczoną strukturą zgrubną* odpowiadającą metryce d.

Fakt 1.4. Niech X będzie parazwartą i lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, zaś $\bar{X}$ jej uzwarceniem. Wówczas zbiór

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X \colon \operatorname{cl} E \subset X \times X \cup \Delta_{\bar{X}}\}$$

jest spójną strukturą zgrubną na X.

Definicja 1.5. Powyższy zbiór $\mathcal{E}$ nazywamy *topologiczną strukturą zgrubną* dla przestrzeni X i jej uzwarcenia $\bar{X}$, bądź też, krócej, topologiczną strukturą zgrubną dla $X \subset \bar{X}$.

Definicja 1.6. Strukturę zgrubną na zbiorze X będziemy nazywać *metryzowalną*, jeśli jest ona ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą pewnej metryce na X.

Przypomnijmy, że

Definicja 1.7. Powiemy, że przestrzeń metryczna X jest *właściwa*, gdy każdy zbiór domknięty i ograniczony w X jest zwarty w X.

Fakt 1.8. Niech (X,d) będzie właściwą przestrzenią metryczną. Wówczas ograniczona struktura zgrubna na X odpowiadająca metryce d równa jest topologicznej strukturze zgrubnej dla uzwarcenia Higsona przestrzeni X.

Fakt 1.9. Niech X będzie nieskończoną przestrzenią dyskretną oraz

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X : \sup_{x \in X} \max(E^x, E_x) < \infty\}.$$

Wówczas $\mathcal{E}$ jest strukturą zgrubną, nazywamy ją *uniwersalną strukturą ograniczoną* na X. Jej uzwarceniem Higsona jest uzwarcenie jednopunktowe $\bar{X}$, zaś topologiczną strukturą zgrubną dla $X \subset \bar{X}$ jest antydyskretna struktura zgrubna.

Możemy teraz sformułować pierwszy przykład niemetryzowalnej struktury zgrubnej.

Fakt 1.10. Uniwersalna struktura ograniczona na X nie jest metryzowalna.

Dowód. Nie wprost. Gdyby uniwersalna struktura ograniczona na X była metryzowalna, to na mocy faktu 1.8 byłaby ona równa topologicznej strukturze zgrubnej dla uzwarcenia Higsona przestrzeni X, którą jest na mocy faktu 1.9 antydyskretna struktura zgrubna. Ale uniwersalna struktura ograniczona jest istotnie mniej zgrubna od struktury antydyskretnej. $\square$

Będziemy w dalszej części badać, jakie struktury zgrubne są metryzowalne. Najpierw jednak udowodnimy, że pewna klasa struktur zgrubnych zmetryzować się w ogóle nie da.

Twierdzenie 1.11. Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, zaś $\bar{X}$ jej metryzowalnym uzwarceniem. Wówczas topologiczna struktura zgrubna dla $X \subset \bar{X}$ nie jest metryzowalna.

Dowód. Nie wprost. Przypuśćmy, wbrew tezie, że istnieje metryka d na X taka, że ograniczona struktura zgrubna $\mathcal{E}$ odpowiadająca metryce d równa jest topologicznej strukturze zgrubnej dla $X \subset \bar{X}$.

Ustalmy punkt $x \in \partial X$. Skonstruujemy ciąg (x_k) punktów z X zbieżny do x. Możemy to uczynić, biorąc za x_k dowolny punkt ze zbioru $B(x, \frac{1}{k}) \cap X$. Ten zbiór jest niepusty, bo X jest gęsty w $\bar{X}$.

Rozważmy teraz zbiór $E_n = \{(x_n, x_k) : k = 1, 2, \ldots\}$. Wówczas $(x_n, x) \in \operatorname{cl} E_n$, czyli $\operatorname{cl} E_n \not\subset X \times X \cup \Delta_{\bar{X}}$. Zatem $E_n \notin \mathcal{E}$, z czego wnioskujemy, że metryka d rozpatrywana jako funkcja $d(x_n, \cdot)$ jest nieograniczona dla każdego n.

Dla każdego n, korzystając z nieograniczoności metryki d po współrzędnych dla ciągu (x_n), wybieramy $y_n \in \{x_k : k \geqslant n\}$ takie, że $d(x_n, y_n) \geqslant n$. Wówczas zbiór $F = \{(x_n, y_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ spełnia warunek $\operatorname{cl} F \subset X \times X \cup (x, x)$, czyli $F \in \mathcal{E}$. Ale $\sup\{d(x', x'') : (x', x'') \in F\} = +\infty$, co leży w sprzeczności z założeniem, że $\mathcal{E}$ jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce d. $\square$

Warto podkreślić, że założenie o metryzowalności $\bar{X}$ jest istotne.

Powyższe twierdzenie można częściowo odwrócić. Na poprzednim referacie pokazaliśmy następującą własność uzwarceń Higsona:

Fakt 1.12. Uzwarcenie Higsona hX właściwej przestrzeni zgrubnej X jest uniwersalnym uzwarceniem zgrubnym w następującym sensie: dla każdego innego uzwarcenia zgrubnego $\bar{X}$ istnieje rozszerzenie identyczności na X do ciągłej surjekcji hX na $\bar{X}$.

Możemy teraz przedstawić

Twierdzenie 1.13. Niech X będzie właściwą przestrzenią metryczną z ograniczoną strukturą zgrubną. Wówczas uzwarcenie Higsona przestrzeni X nie jest metryzowalne.

Szkic dowodu. Istnieje metryka d na X taka, że struktura zgrubna $\mathcal{E}$ na X jest ograniczoną strukturą zgrubną na X odpowiadającą metryce d. Wówczas na mocy tw. 1.8, $\mathcal{E}$ równa jest topologicznej strukturze zgrubnej dla uzwarcenia Higsona hX przestrzeni X. Ale skoro hX jest uniwersalnym uzwarceniem zgrubnym, to istnieje ciągła surjekcja hX na uzwarcenie Stone'a-Čech'a przestrzeni X na hX. Ale skoro uzwarcenie Stone'a-Čech'a nie jest metryzowalne, to hX również. □

Przypomnijmy, że zachodzi następujący

FAKT 1.14. Niech S będzie rodziną podzbiorów $X \times X$. Wówczas istnieje najmniejsza struktura zgrubna $\mathcal{E}$ na X zawierająca S.

DEFINICJA 1.15. Powyższą strukturę zgrubną $\mathcal{E}$ nazywamy strukturą zgrubną *generowaną* przez S. Gdy zbiór S jest przeliczalny, to strukturę $\mathcal{E}$ nazywamy *przeliczalnie generowaną*. Analogicznie, gdy zbiór S jest skończony, to strukturę $\mathcal{E}$ nazywamy *skończenie generowaną*.

PRZYKŁAD 1.16. Niech X będzie dowolną przestrzenią, zaś x i y będą różnymi punktami z X. Wówczas struktura zgrubna generowana przez $\{(x, y)\}$ jest złożona z wszystkich podzbiorów zbioru $\Delta_X \cup \{(x, y), (y, x)\}$.

TWIERDZENIE 1.17. Struktura zgrubna na X jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest przeliczalnie generowana.

Dowód. Załóżmy, że struktura zgrubna $\mathcal{E}$ na X jest metryzowalna, czyli że istnieje metryka d na X taka, że $\mathcal{E}$ jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce d. Wówczas $\mathcal{E}$ jest generowana przez zbiory $E_n = \{(x, x')\colon d(x, x') \leqslant n\}$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Teraz załóżmy przeciwnie, że $\mathcal{E}$ jest generowana przez przeliczalną rodzinę zbiorów $E_n \subset X \times X$, gdzie n $= 1, 2, \ldots$. Zdefiniujemy przez indukcję ciąg (F_n) podzbiorów $X \times X$. Niech $F_0 = \Delta_X$ oraz dla $n > 0$ połóżmy

$$F_n = (F_{n-1} \circ F_{n-1}) \cup E_n \cup E_n^{-1}.$$

Przypomnijmy, że $E' \circ E'' = \{(x', x'')\colon \exists_{x \in X}\ (x', x) \in E', (x, x'') \in E''\}$ dla każdych E', E'' oraz że $E_n^{-1} = \{(x', x)\colon (x, x') \in E_n\}$.

Wówczas zbiory F_n są symetryczne (czyli $F_n = F_n^{-1}$) i spełniają warunek $\Delta_X \subset F_{n-1} \subset F_{n-1} \circ F_{n-1} \subset F_n$. Łatwo wykazać, że rodzina $\mathcal{F}$ wszystkich podzbiorów $X \times X$, które zawierają się w którymś ze zbiorów F_n, jest strukturą zgrubną na X. Zamkniętość na branie podzbiorów i odwrotności jest oczywista. Jeśli $F, F' \in \mathcal{F}$ to istnieją n i m takie, że $F \subset F_n$ i $F' \subset F_m$. Wówczas $F, F' \subset F_k$ gdzie $k = \max(n, m)$ oraz $F \circ F' \subset F_k \circ F_k \subset F_{k+1}$ i $F \cup F' \subset F_k$.

Ponieważ wszystkie generatory E_n należą do $\mathcal{F}$, to zachodzi $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Z drugiej strony każdy F_n należy do $\mathcal{E}$, a więc $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. Zachodzi zatem $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ i zbiory F_n generują $\mathcal{E}$.

Teraz wprowadźmy metrykę d następująco:

$$d(x, x') = \inf\{n \in \mathbb{N}\colon (x,' x) \in F_n\}.$$

Trzeba wykazać, że d rzeczywiście jest metryką. Wystarczy sprawdzić nierówność trójkąta. Rozważmy parami różne $x, x', x'' \in X$ i niech $n = d(x, x')$, $m = d(x', x'')$. Wówczas $(x, x') \in F_n \subset F_k$ oraz $(x', x'') \in F_m \subset F_k$, gdzie $k = \max(n, m)$. Zatem $(x, x'') \in F_k \circ F_k \subset F_{k+1}$, czyli

$$d(x, x'') \leqslant k + 1 = \max(d(x, x'), d(x', x'')) + 1 \leqslant d(x, x') + d(x', x''),$$

bo $d(x, x') \geqslant 1$ i $d(x', x'') \geqslant 1$. □

Zauważmy, że metryka d wprowadzana w powyższym dowodzie może przyjmować wartość $+\infty$. Dzieje się tak wtedy i tylko wtedy, gdy struktura zgrubna $\mathcal{E}$ nie jest spójna. Przypomnijmy, że

Definicja 1.18. Strukturę zgrubną na X nazywamy *spójną*, gdy każdy punkt z $X \times X$ należy do pewnego zbioru kontrolowanego.

Przykład 1.19. Rozważmy dwie kopie $\mathbb{N}_1$ i $\mathbb{N}_2$ przestrzeni $\mathbb{N}$ z naturalną metryką. Niech $X = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$ oraz d będzie metryką na X dziedziczoną ze składowych, przy czym dla $x_1 \in \mathbb{N}_1$, $x_2 \in \mathbb{N}_2$ określamy $d(x_1, x_2) = +\infty$. Wówczas ograniczona struktura zgrubna na X odpowiadająca metryce d nie jest spójna.

Aby to zobaczyć, wygodnie jest utożsamić $\mathbb{N}_1$ i $\mathbb{N}_2$ odpowiednio z dodatnimi i ujemnymi liczbami całkowitymi.

Przykład 1.20. Przypomnijmy, że *dyskretną strukturą zgrubną* na X nazywamy strukturę zgrubną złożoną ze wszystkich podzbiorów $X \times X$, które zawierają tylko skończenie wiele punktów poza przekątną Δ_X. Okazuje się, że dyskretna struktura zgrubna na zbiorze przeliczalnym jest metryzowalna.

Dla przykładu pokażemy, że dyskretna struktura zgrubna $\mathcal{E}$ dla $\mathbb{N}$ jest metryzowalna. Określimy metrykę d na X taką, że $\mathcal{E}$ będzie ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce d. Niech

$$d(x, x') = \begin{cases} \max(x, x') & \text{gdy } x \neq x' \\ 0 & \text{gdy } x = x'. \end{cases}$$

Aby wykazać, że d rzeczywiście jest metryką, wystarczy sprawdzić nierówność trójkąta.

Jako że $\mathcal{E}$ jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce d, to

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X \colon \exists_{M \in \mathbb{N}}\, E \subset \{1, \ldots, M\} \times \{1, \ldots, M\} \cup \Delta_{\mathbb{N}}\}$$

Zatem elementy struktury zgrubnej $\mathcal{E}$ zawierają poza przekątną tylko punkty z pewnego skończonego kwadratu, czyli, krótko mówiąc, zawierają tylko skończenie wiele punktów poza przekątną.

Zbadamy nieco dokładniej te struktury zgrubne, które mają mało generatorów.

Definicja 1.21. Powiemy, że struktura zgrubna na X jest *monogeniczna*, gdy jest generowana przez tylko jeden podzbiór $X \times X$.

Fakt 1.22. Jeśli struktura zgrubna na X jest skończenie generowana, to jest monogeniczna.

Dowód. Załóżmy, że struktura zgrubna $\mathcal{E}$ na X jest generowana przez zbiory $E_1, \ldots, E_n \subset X \times X$. Niech $\mathcal{E}'$ będzie strukturą zgrubną generowaną przez $E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$. Ponieważ $\mathcal{E}$ jest zamknięta ze względu na branie skończonych sum, to $E \in \mathcal{E}$, czyli $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$. Z drugiej strony, $\mathcal{E}'$ jest zamknięta ze względu na branie podzbiorów, więc $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}'$, bo $E_1, \ldots, E_n \subset E$. Zatem zachodzi też $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$. W związku z tym $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, czyli $\mathcal{E}$ jest generowana przez E. □

Rzecz jasna, każda monogeniczna struktura zgrubna jest na mocy twierdzenia 1.17 metryzowalna. Nietrudno sprawdzić, że nie każda metryzowalna struktura zgrubna jest monogeniczna; za przykład może tu posłużyć dyskretna struktura zgrubna na zbiorze przeliczalnym.

Ponownie dokonamy przypomnienia kilku pojęć potrzebnych nam w dalszej części. Na potrzeby poniższych definicji, niech X i Y będą przestrzeniami zgrubnymi.

Definicja 1.23. Zbiór $B \subset X$ nazywamy (zgrubnie) *ograniczonym*, gdy zbiór $B \times B$ jest kontrolowany.

Definicja 1.24. Powiemy, że przekształcenie $f\colon X \to Y$ jest *właściwe*, gdy przeciwobraz zbioru ograniczonego przy przekształceniu f jest ograniczony.

Definicja 1.25. Powiemy, że przekształcenie $f\colon X \to Y$ jest *bornologiczne*, gdy dla dowolnego zbioru kontrolowanego $E \subset X \times X$, zbiór $(f \times f)(E)$ jest kontrolowanym podzbiorem $Y \times Y$.

Definicja 1.26. Powiemy, że przekształcenie jest *zgrubne*, gdy jest ono właściwe i bornologiczne. Jeśli istnieją przekształcenia zgrubne $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$ takie że $f \circ g$ oraz $g \circ f$ są bliskie identyczności (odpowiednio na X i na Y), to przestrzenie X i Y nazywamy *zgrubnie równoważnymi.*

Twierdzenie 1.27. Struktura zgrubna na X jest monogeniczna wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zgrubnie równoważna geodezyjnej przestrzeni metrycznej.

Dowód. Zauważmy wpierw, że własność bycia przestrzenią monogeniczną jest zachowywana przez zgrubną równoważność przestrzeni. Jeśli teraz (X, d) jest geodezyjną przestrzenią metryczną, to dla każdych dwóch różnych punktów x', x'' z X istnieje skończony ciąg punktów

$$x' = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m = x'',$$

taki że $d(x_i, x_{i+1}) \leqslant 1$ dla każdego i oraz $m \leqslant d(x', x'') + 1$. W związku z tym zgrubna struktura na X jest generowana przez zbiór $E = \{(x, y)\colon d(x, y) \leqslant 1\}$, a zatem jest monogeniczna.

Teraz załóżmy przeciwnie, że na X dana jest monogeniczna struktura zgrubna $\mathcal{E}$, generowana przez $E \subset X \times X$. Skonstruujemy graf G następująco: wierzchołkami G będą punkty z X, zaś dwa różne wierzchołki x i y będą połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, y) \in E$. (Punktami w G nie są tylko wierzchołki, ale także *wszystkie* punkty z krawędzi.) Nadajmy każdej krawędzi długość 1 i wprowadźmy na G metrykę najkrótszej drogi oraz ograniczoną strukturę zgrubną odpowiadającą tej metryce.

Wówczas G jest zupełną przestrzenią geodezyjną. (Każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest od pewnego miejsca stały.) Zdefiniujmy przekształcenie $f\colon X \to G$ tak, że obrazem punktu z X jest odpowiadający mu wierzchołek grafu. Ponieważ f przekształca zbiór E w zbiór punktów w $G \times G$ oddalonych nie dalej niż 1 od przekątnej Δ_G, to f jest przekształceniem zgrubnym.

Podobnie, zdefiniujmy przekształcenie $g\colon G \to X$ tak, że obrazem punktu $g \in G$ jest punkt z X odpowiadający temu wierzchołkowi grafu G, który leży najbliżej punktu g. Punktom z G leżącym pośrodku krawędzi łączącej dwa wierzchołki przyporządkujmy dowolny z nich. Wówczas g jest przekształceniem zgrubnym, a ponadto złożenia $f \circ g$ oraz $g \circ f$ są bliskie identyczności, zatem X i G są zgrubnie równoważne. □

Z uwagi na tę równoważność, monogeniczne przestrzenie zgrubne bywają nazywane *zgrubnie geodezyjnymi.*

2 Hiperbolizacja przestrzeni metrycznych

Rozważmy dowolną przestrzeń metryczną. Każda kula w tej przestrzeni jest charakteryzowana przez jej środek i promień. Prowadzi to w naturalny sposób do poniższej definicji:

Definicja 2.1. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Wówczas przestrzeń $\mathcal{H}(X) = X \times \mathbb{R}^+$ nazywamy *przestrzenią kul* w X.

Chcielibyśmy określić strukturę zgrubną na $\mathcal{H}(X)$. Intuicyjnie można powiedzieć, że kule są bliskie, gdy ich przecięcie stanowi istotną część każdej z nich. Wówczas kule powinny mieć zbliżoną wielkość, a więc i zbliżone promienie, oraz odległość między ich środkami nie powinna zbyt duża w porównaniu z ich promieniami.

Definicja 2.2. Przestrzeń kul $\mathcal{H}(X)$ wraz ze strukturą zgrubną generowaną przez zbiór

$$E = \left\{ ((x,t),(x',t')) \in \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \colon\ \frac{1}{2} \leqslant \frac{t}{t'} \leqslant 2,\ d(x,x') \leqslant \frac{1}{2}\min(t,t') \right\}.$$

nazywamy *przestrzenią hiperboliczną* nad X.

Na mocy twierdzenia 1.17, struktura zgrubna na $\mathcal{H}(X)$ jest metryzowalna. Analiza dowodu tego twierdzenia pozwala w sposób konstruktywny wskazać metrykę na $\mathcal{H}(X)$, wyznaczającą rozważaną strukturę zgrubną.

Metryka konstruowana w dowodzie twierdzenia 1.17 okazuje się jednak bardzo niewygodna w użyciu, dlatego pokażemy, że struktura zgrubna na $\mathcal{H}(X)$ jest ograniczoną strukturą zgrubną dla pewnej innej metryki, jej równoważnej.

Dla punktów $z = (x,t)$ oraz $z' = (x',t')$ z $\mathcal{H}(X)$, określmy metrykę ρ następująco:

$$\rho(z,z') = \log\left(\frac{d(x,x') + \max(t,t')}{\sqrt{tt'}}\right).$$

Należy sprawdzić, że ρ rzeczywiście jest metryką. Symetria nie wymaga komentarza. Ponieważ

$$\frac{d(x,x') + \max(t,t')}{\sqrt{tt'}} \geqslant \frac{\max(t,t')}{\sqrt{tt'}} \geqslant \frac{\max(t,t')}{\sqrt{\max(t,t')^2}} = \frac{\max(t,t')}{\max(t,t')} = 1,$$

to ρ przyjmuje wartości nieujemne, ponadto wartość ułamka pod logarytmem jest równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $d(x,x') = 0$ oraz $t = \max(t,t') = t'$, czyli gdy $z = z'$.

Pozostała do sprawdzenia nierówność trójkąta. Rozważmy trzy punkty z przestrzeni $\mathcal{H}(X)$, mianowicie $z = (x,t)$, $z' = (x',t')$, $z'' = (x'',t'')$. Ponieważ suma logarytmów dwóch liczb równa jest logarytmowi ich iloczynu, to wystarczy sprawdzić, że

$$\frac{d(x,x'') + \max(t,t'')}{\sqrt{tt''}} \leqslant \frac{d(x,x') + \max(t,t')}{\sqrt{tt'}} \cdot \frac{d(x',x'') + \max(t',t'')}{\sqrt{t't''}},$$

$$\text{czyli że } t' \cdot \big(d(x,x'') + \max(t,t'')\big) \leqslant \big(d(x,x') + \max(t,t')\big)\big(d(x',x'') + \max(t',t'')\big).$$

Tą ostatnią nierówność łatwo zaś pokazać, korzystając z faktu że

$$t' \cdot \max(t,t'') \leqslant \max(t,t') \cdot \max(t',t'')$$

$$\text{oraz } t' \cdot d(x,x'') \leqslant t'\big(d(x,x') + d(x',x'')\big) \leqslant \max(t',t'') \cdot d(x,x') + \max(t,t') \cdot d(x',x'').$$

Fakt 2.3. Struktura zgrubna przestrzeni hiperbolicznej jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce ρ.

Dowód. Wystarczy pokazać, że istnieją dodatnie stałe α, β takie, że

1. jeśli $(z, z') \in E$, to $\rho(z, z') \leqslant \alpha$
2. jeśli $\rho(z, z') \leqslant \beta$, to $(z, z') \in E$.

Jeśli $(z, z') \in E$, to

$$\rho(z, z') = \log\left(\frac{d(x, x') + \max(t, t')}{\sqrt{tt'}}\right) \leqslant \log\left(\frac{\min(t, t')/2 + \max(t, t')}{\sqrt{\min(t, t')\max(t, t')}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\min(t, t')}{\max(t, t')}} + \sqrt{\frac{\max(t, t')}{\min(t, t')}}\right) \leqslant \log\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + 1\right) = \log(\sqrt{2} + 1) = \alpha.$$

Z drugiej strony, jeśli $\rho(z, z') \leqslant \log\frac{4}{3} = \beta$, to

$$\frac{d(x, x') + \max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \leqslant \frac{4}{3}, \text{ a więc } \frac{\max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \leqslant \frac{4}{3}$$

skąd mamy $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \leqslant t/t' \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^2$, a więc $\frac{1}{2} \leqslant t/t' \leqslant 2$. Ponadto

$$\frac{d(x, x') + \max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \geqslant \frac{d(x, x')}{\sqrt{tt'}} + 1,$$

a więc $d(x, x')/\sqrt{tt'} \leqslant \frac{1}{3}$, skąd otrzymujemy $d(x, x')/\min(t, t') \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}$. $\square$