Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Aleksander Jankowski
Nr albumu: 219452

Metryzacja struktur zgrubnych

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Tadeusza Koźniewskiego
Instytut Matematyki

Wrzesień 2007

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pierwszej części pracy wprowadzam podstawowe pojęcia zgrubnej geometrii, w szczególności ograniczone struktury zgrubne – naturalne przy rozważaniu przestrzeni metrycznych, oraz topologiczne struktury zgrubne – które są zadane przez wskazanie przestrzeni topologicznej i jej uzwarcenia.

W rozdziale drugim pokazuję kilka przykładów niemetryzowalnych struktur zgrubnych, czyli takich, które nie są ograniczoną strukturą zgrubną dla żadnej metryki na danej przestrzeni.

Na koniec dokonuję charakteryzacji wszystkich metryzowalnych struktur zgrubnych. Okazuje się, że wszystkie one są co najwyżej przeliczalnie generowane. Ponadto, jeśli struktura zgrubna jest skończenie generowana, to przestrzeń, na której jest określona, jest zgrubnie równoważna geodezyjnej przestrzeni metrycznej.

Słowa kluczowe

struktury zgrubne, topologiczne struktury zgrubne, ograniczone struktury zgrubne, zgrubna równoważność, metryzowalność, uzwarcenie Higsona, przestrzenie geodezyjne

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

54 General topology
54E Spaces with richer structures
54E99 None of the above, but in this section

Tytuł pracy w języku angielskim

Metrization of coarse structures

Spis treści

Rozdział 1

Struktury zgrubne i ich własności

1.1. Definicja

Zaczniemy od kilku definicji, które ułatwią nam wprowadzenie pojęcia struktury zgrubnej. Niech X będzie dowolnym zbiorem.

Definicja 1.1.1. Niech $E \subset X \times X$. Wówczas zbiór $E^{-1} = \{(x', x) : (x, x') \in E\}$ nazywamy *odwrotnością* zbioru E.

Definicja 1.1.2. Niech $E', E'' \subset X \times X$. Wówczas zbiór

$$E' \circ E'' = \{(x', x'') : \exists_{x \in X}\ (x', x) \in E', (x, x'') \in E''\}$$

nazywamy *produktem* zbiorów E' i E''.

Definicja 1.1.3. Niech $E \subset X \times X$ i $K \subset X$. Wprowadzamy oznaczenie

$$E[K] = \{x' : \exists_{x \in K}\ (x', x) \in E\}.$$

Wówczas zbiory $E_x = E[\{x\}] = \{x' : (x', x) \in E\}$ i $E^x = E^{-1}[\{x\}] = \{x' : (x, x') \in E\}$ nazywamy *włóknami* E.

Definicja 1.1.4. Zbiór $\Delta_X = \{(x, x) \colon x \in X\}$ nazywamy *przekątną* zbioru $X \times X$.

Definicja 1.1.5. Strukturą zgrubną na X nazywamy rodzinę $\mathcal{E}$ podzbiorów zbioru $X \times X$, zawierającą przekątną Δ_X oraz zamkniętą ze względu na branie podzbiorów, odwrotności, produktów i skończonych sum. Elementy rodziny $\mathcal{E}$ nazywamy *zbiorami kontrolowanymi.*

Definicja 1.1.6. Jeśli $\mathcal{E}$ jest strukturą zgrubną na zbiorze X, to $(X, \mathcal{E})$ nazywamy *strukturą zgrubną.*

Definicja 1.1.7. Zbiór $B \subset X$ nazywamy (zgrubnie) *ograniczonym*, gdy zbiór $B \times B$ jest kontrolowany.

1.2. Ograniczone struktury zgrubne

W tym podrozdziale podamy pewną naturalną konstrukcję struktury zgrubnej na dowolnej przestrzeni metrycznej.

Fakt 1.2.1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Rodzina

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X \colon \sup\{d(x, x') \colon (x, x') \in E\} < +\infty\}$$

jest strukturą zgrubną na zbiorze X.

Dowód. Wystarczy sprawdzić warunki z definicji. Rzecz jasna $\mathcal{E}$ zawiera przekątną i jest zamknięta ze względu na branie podzbiorów, odwrotności i skończonych sum. Ponadto produkt dwóch zbiorów kontrolowanych jest zbiorem kontrolowanym na mocy nierówności trójkąta dla metryki d. □

Definicja 1.2.2. Powyższą rodzinę $\mathcal{E}$ nazywamy *ograniczoną strukturą zgrubną* odpowiadającą metryce d.

Definicja 1.2.3. Strukturę zgrubną na zbiorze X będziemy nazywać *metryzowalną*, jeśli jest ona ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą pewnej metryce na X.

1.3. Topologiczne struktury zgrubne

Wprowadziliśmy już pojęcie struktury zgrubnej. Teraz pokażemy, jak w naturalny sposób określić strukturę zgrubną na przestrzeni topologicznej z ustalonym uzwarceniem.

Definicja 1.3.1. Powiemy, że przestrzeń topologiczna X jest *parazwarta*, gdy w każde pokrycie przestrzeni X zbiorami otwartymi można wpisać lokalnie skończone pokrycie zbiorami otwartymi.

Fakt 1.3.2. Każda przestrzeń zwarta jest parazwarta. Każda przestrzeń metryzowalna jest parazwarta.

Dowód powyższego faktu znajdzie Czytelnik w [1].

Definicja 1.3.3. Niech $\bar{X}$ będzie uzwarceniem przestrzeni topologicznej X. Wówczas zbiór $\partial X = \bar{X} \setminus X$ nazywamy *narostem* uzwarcenia $X \subset \bar{X}$.

Fakt 1.3.4. Niech X będzie parazwartą i lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, zaś $\bar{X}$ jej uzwarceniem. Oznaczmy przez cl operację domknięcia w przestrzeni $\bar{X} \times \bar{X}$. Wówczas zbiór

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X \colon \operatorname{cl} E \subset X \times X \cup \Delta_{\partial X}\}$$

jest strukturą zgrubną na X.

Dowód powyższego faktu można znaleźć w [2].

Definicja 1.3.5. Powyższą rodzinę $\mathcal{E}$ nazywamy *topologiczną strukturą zgrubną* dla przestrzeni X i jej uzwarcenia $\bar{X}$, bądź też, krócej, topologiczną strukturą zgrubną dla $X \subset \bar{X}$.

Uwaga 1.3.6. Zauważmy, że $X \times X \cup \Delta_{\partial X} = X \times X \cup \Delta_{\bar{X}}$.

Uwaga 1.3.7. W dalszej części pracy przez operację cl domknięcia elementu topologicznej struktury zgrubnej dla $X \subset \bar{X}$ rozumieć będziemy operację domknięcia w przestrzeni $\bar{X} \times \bar{X}$. Rzecz jasna, jeśli $E \in \mathcal{E}$, to $\operatorname{cl} E \in \mathcal{E}$.

1.4. Antydyskretne struktury zgrubne

Przypomnijmy, że podzbiór przestrzeni topologicznej nazywamy *relatywnie zwartym*, jeśli jego domknięcie jest zwarte w tej przestrzeni.

DEFINICJA 1.4.1. Zbiór $E \subset X \times X$ nazywamy *właściwym*, jeśli dla każdego $A \subset X$, jeśli A jest relatywnie zwarte, to zbiory $E[A]$ i $E^{-1}[A]$ są relatywnie zwarte.

Przytoczymy bez dowodu, z myślą o przykładzie sformułowanym w następnym rozdziale, następujący

FAKT 1.4.2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Rodzina $\mathcal{E}$ wszystkich właściwych podzbiorów $X \times X$ jest strukturą zgrubną na X.

Zauważmy, że jeśli X jest przestrzenią zwartą, to powyższa struktura jest maksymalną strukturą zgrubną, zawierającą wszystkie podzbiory $X \times X$.

DEFINICJA 1.4.3. Powyższą rodzinę $\mathcal{E}$ nazywamy *antydyskretną strukturą zgrubną* na przestrzeni X.

Rozdział 2

Przykłady niemetryzowalnych struktur zgrubnych

Aby lepiej zrozumieć, jakie własności mają metryzowalne struktury zgrubne, podamy wpierw kilka klas struktur zgrubnych, których zmetryzować się nie da.

2.1. Topologiczna struktura zgrubna pochodząca od metryzowalnego uzwarcenia

Twierdzenie 2.1.1. Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, zaś $\bar{X}$ jej metryzowalnym uzwarceniem. Wówczas topologiczna struktura zgrubna dla $X \subset \bar{X}$ nie jest metryzowalna.

Dowód. Nie wprost. Przypuśćmy, wbrew tezie, że istnieje metryka d na X taka, że ograniczona struktura zgrubna $\mathcal{E}$ odpowiadająca metryce d równa jest topologicznej strukturze zgrubnej dla $X \subset \bar{X}$.

Ustalmy punkt $x \in \partial X$. Skonstruujemy ciąg (x_k) punktów z X zbieżny do x. Możemy to uczynić, ponieważ X jest gęsty w $\bar{X}$, zaś w X istnieje przeliczalna baza otoczeń dla każdego punktu.

Rozważmy teraz zbiór $E_n = \{(x_n, x_k)\colon k = 1, 2, \dots\}$. Wówczas $(x_n, x) \in \operatorname{cl} E_n$, czyli $\operatorname{cl} E_n \not\subset X \times X \cup \Delta_{\bar{X}}$. Zatem $E_n \notin \mathcal{E}$, z czego wnioskujemy, że metryka d rozpatrywana jako funkcja $d(x_n, \cdot)$ jest nieograniczona dla każdego n.

Dla każdego n, korzystając z nieograniczoności metryki d po współrzędnych dla ciągu (x_n), wybieramy $y_n \in \{x_k\colon k \geqslant n\}$ takie, że $d(x_n, y_n) \geqslant n$. Wówczas zbiór $F = \{(x_n, y_n)\colon n = 1, 2, \dots\}$ spełnia warunek $\operatorname{cl} F \subset X \times X \cup (x, x)$, czyli $F \in \mathcal{E}$. Ale $\sup\{d(x', x'')\colon (x', x'') \in F\} = +\infty$, co leży w sprzeczności z założeniem, że $\mathcal{E}$ jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce d. □

Warto podkreślić, że założenie o metryzowalności X jest istotne dla istnienia przeliczalnej bazy topologii w każdym punkcie.

Przykład 2.1.2. Topologiczna struktura zgrubna dla $(0, 1) \subset [0, 1]$ nie jest metryzowalna.

Dowód. Uzwarcenie $(0, 1) \subset [0, 1]$ jest w naturalny sposób metryzowalne, zatem teza zachodzi na mocy twierdzenia 2.1.1. □

2.2. Uniwersalna struktura ograniczona

Omówimy teraz inny przykład niemetryzowalnej struktury zgrubnej – uniwersalną strukturę ograniczoną. O ile jej definicja nie nastręczy większego kłopotu, to w celu wykazania jej niemetryzowalności odwołamy się do dość zaawansowanego aparatu matematycznego, jaki stanowią $\mathbb{C}^*$-algebry i uzwarcenie Higsona. Pełniejsze wprowadzenie do tej teorii można znaleźć w [3].

DEFINICJA 2.2.1. Niech X będzie parazwartą przestrzenią Hausdorffa. Powiemy, że struktura zgrubna $\mathcal{E}$ na X jest *właściwa*, gdy jednym z jej elementów jest pewne otoczenie przekątnej Δ_X, oraz domknięcie każdego zgrubnie ograniczonego zbioru w X jest zwarte.

DEFINICJA 2.2.2. Przestrzeń metryczną X nazywamy *właściwą*, gdy każdy domknięty i ograniczony zbiór w X jest zwarty.

FAKT 2.2.3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, zaś $\mathcal{E}$ ograniczoną strukturą zgrubną na X odpowiadającą metryce d. Wówczas struktura zgrubna $\mathcal{E}$ jest właściwa wtedy i tylko wtedy gdy X jest właściwą przestrzenią metryczną.

Dowód. Wpierw załóżmy, że struktura zgrubna $\mathcal{E}$ jest właściwa. Niech B będzie domkniętym i ograniczonym (w sensie metryki d) podzbiorem X. Wówczas zbiór $B \times B$ jest kontrolowany na mocy definicji ograniczonej struktury zgrubnej, a zatem B jest zgrubnie ograniczony. Jako że B jest domknięty i zgrubnie ograniczony, to jest zwarty na mocy założenia mówiącego, że $\mathcal{E}$ jest właściwą strukturą zgrubną. Zatem X jest właściwą przestrzenią metryczną.

Teraz załóżmy, że X jest właściwą przestrzenią metryczną. Wpierw zauważmy, że zbiór $E = \{(x, x') \in X \times X : d(x, x') < 1\}$ będący elementem ograniczonej struktury zgrubnej $\mathcal{E}$ jest otoczeniem przekątnej Δ_X. Rozważmy teraz zgrubnie ograniczony zbiór $B \subset X$. Ponieważ $B \times B$ jest zbiorem kontrolowanym w $\mathcal{E}$, to B jest ograniczony (w sensie metryki d). Jego domknięcie jest zwarte na mocy definicji właściwej przestrzeni metrycznej. Wykazaliśmy w ten sposób, że struktura zgrubna $\mathcal{E}$ jest właściwa. □

DEFINICJA 2.2.4. Powiemy, że $(X, \mathcal{E})$ jest właściwą przestrzenią zgrubną, gdy $\mathcal{E}$ jest właściwą strukturą zgrubną na parazwartej przestrzeni Hausdorffa X.

FAKT 2.2.5. Niech $(X, \mathcal{E})$ będzie właściwą przestrzenią zgrubną. Istnieje uzwarcenie hX przestrzeni X, nazywane *uzwarceniem Higsona* przestrzeni $(X, \mathcal{E})$, mające następujące własności:

1. Jeśli (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną, a $\mathcal{E}$ ograniczoną strukturą zgrubną na X odpowiadającą metryce d, to topologiczna struktura zgrubna dla uzwarcenia Higsona przestrzeni $(X, \mathcal{E})$ równa jest tej samej strukturze $\mathcal{E}$.

2. Niech X będzie nieskończoną przestrzenią dyskretną. Wówczas

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X \colon \sup_{x \in X} \max(|E^x|, |E_x|) < \infty\}$$

   jest strukturą zgrubną na X nazywaną *uniwersalną strukturą ograniczoną* na X, a jej uzwarceniem Higsona jest uzwarcenie jednopunktowe $\bar{X}$. Topologiczną strukturą zgrubną dla $X \subset \bar{X}$ jest antydyskretna struktura zgrubna, która jest zgrubniejsza (czyli jest bogatszą rodziną) niż uniwersalna struktura ograniczona.

Dokładne sformułowanie definicji uzwarcenia Higsona oraz szersze omówienie powyższych własności znajdzie Czytelnik w [3].

Możemy teraz sformułować przykład niemetryzowalnej struktury zgrubnej.

Fakt 2.2.6. Uniwersalna struktura ograniczona nie jest metryzowalna.

Dowód. Rozważmy uniwersalną strukturę ograniczoną określoną na nieskończonej przestrzeni dyskretnej X. Dowód przeprowadzimy nie wprost.

Gdyby uniwersalna struktura ograniczona na X była metryzowalna, to na mocy faktu 2.2.5 (1) byłaby ona równa topologicznej strukturze zgrubnej dla uzwarcenia Higsona przestrzeni X, którą jest na mocy faktu 2.2.5 (2) antydyskretna struktura zgrubna. Ale uniwersalna struktura ograniczona jest istotnie mniej zgrubna od struktury antydyskretnej, co prowadzi do sprzeczności. $\square$

Rozdział 3

Charakteryzacja metryzowalnych struktur zgrubnych

3.1. Struktura zgrubna generowana przez rodzinę podzbiorów

Wpierw pokażemy następujący

FAKT 3.1.1. Niech S będzie rodziną podzbiorów $X \times X$. Wówczas istnieje najmniejsza struktura zgrubna $\mathcal{E}$ na X zawierająca S.

Dowód. Wpierw zauważmy, że dowolny iloczyn struktur zgrubnych jest strukturą zgrubną. Teraz zauważmy, że zbiór wszystkich struktur zgrubnych zawierających S jest niepusty, gdyż należy do niego struktura zgrubna zawierająca wszystkie podzbiory $X \times X$. Iloczyn tych wszystkich struktur jest szukaną najmniejszą strukturą zgrubną. ☐

DEFINICJA 3.1.2. Powyższą strukturę zgrubną $\mathcal{E}$ nazywamy strukturą zgrubną *generowaną* przez S. Gdy zbiór S jest przeliczalny, to strukturę $\mathcal{E}$ nazywamy *przeliczalnie generowaną*. Analogicznie, gdy zbiór S jest skończony, to strukturę $\mathcal{E}$ nazywamy *skończenie generowaną*.

PRZYKŁAD 3.1.3. Niech X będzie dowolną przestrzenią, zaś x i y będą różnymi punktami z X. Wówczas struktura zgrubna generowana przez $\{(x, y)\}$ jest złożona z wszystkich podzbiorów zbioru $\Delta_X \cup \{(x, y), (y, x)\}$.

3.2. Kryterium metryzowalności struktur zgrubnych

TWIERDZENIE 3.2.1. Struktura zgrubna na X jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest przeliczalnie generowana.

Dowód. Załóżmy, że struktura zgrubna $\mathcal{E}$ na X jest metryzowalna, czyli że istnieje metryka d na X taka, że $\mathcal{E}$ jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce d. Wówczas $\mathcal{E}$ jest generowana przez zbiory $E_n = \{(x, x') \colon d(x, x') \leqslant n\}$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Teraz załóżmy przeciwnie, że $\mathcal{E}$ jest generowana przez przeliczalną rodzinę zbiorów $E_n \subset X \times X$, gdzie n $= 1, 2, \ldots$. Zdefiniujemy przez indukcję ciąg (F_n) podzbiorów $X \times X$. Niech $F_0 = \Delta_X$ oraz dla $n > 0$ połóżmy

$$F_n = (F_{n-1} \circ F_{n-1}) \cup E_n \cup E_n^{-1}.$$

Przypomnijmy, że $E' \circ E'' = \{(x', x'')\colon \exists_{x \in X}\ (x', x) \in E', (x, x'') \in E''\}$ dla każdych E', E'' oraz że $E_n^{-1} = \{(x', x)\colon (x, x') \in E_n\}$.

Wówczas zbiory F_n są symetryczne (czyli $F_n = F_n^{-1}$) i spełniają warunek $\Delta_X \subset F_{n-1} \subset F_{n-1} \circ F_{n-1} \subset F_n$. Łatwo wykazać, że rodzina $\mathcal{F}$ wszystkich podzbiorów $X \times X$, które zawierają się w którymś ze zbiorów F_n, jest strukturą zgrubną na X. Zamkniętość na branie podzbiorów i odwrotności jest oczywista. Jeśli $F, F' \in \mathcal{F}$ to istnieją n i m takie, że $F \subset F_n$ i $F' \subset F_m$. Wówczas $F, F' \subset F_k$ gdzie $k = \max(n, m)$ oraz $F \circ F' \subset F_k \circ F_k \subset F_{k+1}$ i $F \cup F' \subset F_k$.

Ponieważ wszystkie generatory E_n należą do $\mathcal{F}$, to zachodzi $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Z drugiej strony każdy F_n należy do $\mathcal{E}$, a więc $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. Zachodzi zatem $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ i zbiory F_n generują $\mathcal{E}$.

Teraz wprowadźmy metrykę d następująco:

$$d(x, x') = \inf\{n \in \mathbb{N}\colon (x,' x) \in F_n\}.$$

Trzeba wykazać, że d rzeczywiście jest metryką. Wystarczy sprawdzić nierówność trójkąta. Rozważmy parami różne $x, x', x'' \in X$ i niech $n = d(x, x')$, $m = d(x', x'')$. Wówczas $(x, x') \in F_n \subset F_k$ oraz $(x', x'') \in F_m \subset F_k$, gdzie $k = \max(n, m)$. Zatem $(x, x'') \in F_k \circ F_k \subset F_{k+1}$, czyli

$$d(x, x'') \leqslant k + 1 = \max(d(x, x'), d(x', x'')) + 1 \leqslant d(x, x') + d(x', x''),$$

bo $d(x, x') \geqslant 1$ i $d(x', x'') \geqslant 1$. □

Zauważmy, że metryka d wprowadzana w powyższym dowodzie może przyjmować wartość $+\infty$. Dzieje się tak wtedy i tylko wtedy, gdy struktura zgrubna $\mathcal{E}$ nie jest spójna. Przypomnijmy, że

Definicja 3.2.2. Strukturę zgrubną na X nazywamy *spójną*, gdy każdy punkt z $X \times X$ należy do pewnego zbioru kontrolowanego.

Przykład 3.2.3. Rozważmy dwie kopie $\mathbb{N}_1$ i $\mathbb{N}_2$ przestrzeni $\mathbb{N}$ z naturalną metryką. Niech $X = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$ oraz d będzie metryką na X dziedziczoną ze składowych, przy czym dla $x_1 \in \mathbb{N}_1$, $x_2 \in \mathbb{N}_2$ określamy $d(x_1, x_2) = +\infty$. Wówczas ograniczona struktura zgrubna na X odpowiadająca metryce d nie jest spójna.

Aby to zobaczyć, wygodnie jest utożsamić $\mathbb{N}_1$ i $\mathbb{N}_2$ odpowiednio z dodatnimi i ujemnymi liczbami całkowitymi.

Przykład 3.2.4. Przypomnijmy, że *dyskretną strukturą zgrubną* na X nazywamy strukturę zgrubną złożoną ze wszystkich podzbiorów $X \times X$, które zawierają tylko skończenie wiele punktów poza przekątną Δ_X. Okazuje się, że dyskretna struktura zgrubna na zbiorze przeliczalnym jest metryzowalna.

Dla przykładu pokażemy, że dyskretna struktura zgrubna $\mathcal{E}$ dla $\mathbb{N}$ jest metryzowalna. Określimy metrykę d na $\mathbb{N}$ taką, że $\mathcal{E}$ będzie ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce d. Niech

$$d(x, x') = \begin{cases} \max(x, x') & \text{gdy } x \neq x' \\ 0 & \text{gdy } x = x'. \end{cases}$$

Aby wykazać, że d rzeczywiście jest metryką, wystarczy sprawdzić nierówność trójkąta.

Jako że $\mathcal{E}$ jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce d, to

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X\colon \exists_{M \in \mathbb{N}}\ E \subset \{1, \ldots, M\} \times \{1, \ldots, M\} \cup \Delta_{\mathbb{N}}\}$$

Zatem elementy struktury zgrubnej $\mathcal{E}$ zawierają poza przekątną tylko punkty z pewnego skończonego kwadratu, czyli, krótko mówiąc, zawierają tylko skończenie wiele punktów poza przekątną.

3.3. Monogeniczne struktury zgrubne

Zbadamy nieco dokładniej te struktury zgrubne, które mają mało generatorów.

Definicja 3.3.1. Powiemy, że struktura zgrubna na X jest *monogeniczna*, gdy jest generowana przez tylko jeden podzbiór $X \times X$.

Fakt 3.3.2. Jeśli struktura zgrubna na X jest skończenie generowana, to jest monogeniczna.

Dowód. Załóżmy, że struktura zgrubna $\mathcal{E}$ na X jest generowana przez zbiory $E_1, \ldots, E_n \subset X \times X$. Niech $\mathcal{E}'$ będzie strukturą zgrubną generowaną przez $E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$. Ponieważ $\mathcal{E}$ jest zamknięta ze względu na branie skończonych sum, to $E \in \mathcal{E}$, czyli $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$. Z drugiej strony, $\mathcal{E}'$ jest zamknięta ze względu na branie podzbiorów, więc $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}'$, bo $E_1, \ldots, E_n \subset E$. Zatem zachodzi też $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$. W związku z tym $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, czyli $\mathcal{E}$ jest generowana przez E. □

Rzecz jasna, każda monogeniczna struktura zgrubna jest na mocy twierdzenia 3.2.1 metryzowalna. Nietrudno sprawdzić, że nie każda metryzowalna struktura zgrubna jest monogeniczna; za przykład może tu posłużyć dyskretna struktura zgrubna na zbiorze przeliczalnym.

Dokonamy teraz wprowadzenia kilku pojęć potrzebnych nam w dalszej części. Na potrzeby poniższych definicji, niech X i Y będą przestrzeniami zgrubnymi.

Definicja 3.3.3. Powiemy, że przekształcenie $f\colon X \to Y$ jest *właściwe*, gdy przeciwobraz zbioru ograniczonego przy przekształceniu f jest ograniczony.

Definicja 3.3.4. Powiemy, że przekształcenie $f\colon X \to Y$ jest *bornologiczne*, gdy dla dowolnego zbioru kontrolowanego $E \subset X \times X$, zbiór $(f \times f)(E)$ jest kontrolowanym podzbiorem $Y \times Y$.

Definicja 3.3.5. Niech X będzie przestrzenią zgrubną. Powiemy, że dwa przekształcenia $f, g\colon S \to X$ są *bliskie*, gdy zbiór $\{(f(s), g(s))\colon s \in S\}$ jest kontrolowanym podzbiorem $X \times X$.

Definicja 3.3.6. Powiemy, że przekształcenie jest *zgrubne*, gdy jest ono właściwe i bornologiczne. Jeśli istnieją przekształcenia zgrubne $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$ takie że $f \circ g$ oraz $g \circ f$ są bliskie identyczności (odpowiednio na X i na Y), to przestrzenie X i Y nazywamy *zgrubnie równoważnymi.*

Lemat 3.3.7. Załóżmy, że rodzina S podzbiorów $X \times X$ generuje strukturę zgrubną $\mathcal{E}$ na X. Wówczas każdy element $E \in \mathcal{E}$ można otrzymać z elementów S oraz przekątnej Δ_X za pomocą skończonego ciągu operacji brania podzbiorów, odwrotności, produktów i skończonych sum.

Dowód. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów $X \times X$, które można otrzymać z elementów S oraz przekątnej Δ_X za pomocą skończonego ciągu operacji brania podzbiorów, odwrotności, produktów i skończonych sum. Pokażemy, że $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Wpierw zauważmy, że Δ_X oraz elementy S należą do $\mathcal{E}$, wobec czego przez indukcję względem długości wyprowadzenia pokazujemy, że każdy element $\mathcal{F}$ należy do $\mathcal{E}$, co oznacza, że $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. Teraz przypomnijmy, że na mocy definicji struktury zgrubnej generowanej przez rodzinę podzbiorów, $\mathcal{E}$ jest najmniejszą strukturą zgrubną zawierającą S, a zatem $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Stąd mamy $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. □

Twierdzenie 3.3.8. Niech $\mathcal{E}$ będzie strukturą zgrubną na X, $\mathcal{F}$ strukturą zgrubną na Y. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$ zadają zgrubną równoważność X i Y. Wówczas jeśli rodzina S podzbiorów $X \times X$ generuje $\mathcal{E}$, to rodzina

$$T = \Big\{(f \times f)(E)\colon E \in S\Big\} \cup \Big\{\{(y, f(g(y)))\colon y \in Y\}\Big\}$$

podzbiorów $Y \times Y$ generuje $\mathcal{F}$.

Dowód. Niech $\mathcal{F}'$ będzie strukturą zgrubną na Y generowaną przez T. Pokażemy, że $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.
Wpierw udowodnimy, że $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Wystarczy pokazać, że generatory $\mathcal{F}'$ należą do $\mathcal{F}$, czyli że elementy T należą do $\mathcal{F}$. Ale dla dowolnego $E \in S$ mamy $E \in \mathcal{E}$, a więc z bornologiczności f, $(f \times f)(E) \in \mathcal{F}$. Ponadto $f \circ g$ jest bliskie identyczności na Y, zatem $\big\{(y, f(g(y)))\colon y \in Y\big\} \in \mathcal{F}$.
Zanim przejdziemy do drugiej części dowodu, to pokażemy, że dla dowolnego $E \in \mathcal{E}$ zachodzi $(f \times f)(E) \in \mathcal{F}'$. Niewątpliwie jest to prawdą, gdy $E = \Delta_X$, jako że $(f \times f)(\Delta_X) \subset \Delta_Y \in \mathcal{F}'$, oraz gdy $E \in S$, czyli gdy E jest jednym z generatorów $\mathcal{E}$ – albowiem tak właśnie zdefiniowaliśmy $\mathcal{F}'$.
Na mocy lematu 3.3.7, E ma skończonej długości wyprowadzenie z elementów S oraz przekątnej Δ_X. Dalszy dowód rzeczonej własności przebiega przez indukcję ze względu na długość tego wyprowadzenia. Jeśli $E', E'' \in \mathcal{E}$ oraz $(f \times f)(E'), (f \times f)(E'') \in \mathcal{F}'$, to

- jeśli $E \subset E'$, to $(f \times f)(E) \subset (f \times f)(E')$, a więc $(f \times f)(E) \in \mathcal{F}'$ (branie podzbiorów)
- jeśli $E = (E')^{-1}$, to $(f \times f)(E) = ((f \times f)(E'))^{-1}$, a więc $(f \times f)(E) \in \mathcal{F}'$ (branie odwrotności)
- jeśli $E = E' \circ E''$, to $(f \times f)(E) = \{(f(x'), f(x'')) : \exists_{x \in X}\ (x', x) \in E', (x, x'') \in E''\} \subset ((f \times f)(E')) \circ ((f \times f)(E''))$, a więc $(f \times f)(E) \in \mathcal{F}'$ (branie produktów)
- jeśli $E = E' \cup E''$, to $(f \times f)(E) = ((f \times f)(E')) \cup ((f \times f)(E''))$, a więc $(f \times f)(E) \in \mathcal{F}'$ (branie skończonych sum).

Pozostało do wykazania, że $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Niech $F \in \mathcal{F}$. Wówczas $(g \times g)(F) \in \mathcal{E}$ z bornologiczności g, a zatem $((f \circ g) \times (f \circ g))(F) \in \mathcal{F}'$. Mamy zatem $\big\{(f(g(y)), f(g(y')))\colon (y, y') \in F\big\} \in \mathcal{F}'$. Ale ponieważ $\big\{(y, f(g(y)))\colon y \in Y\big\} \in \mathcal{F}'$ i $\mathcal{F}'$ jest zamknięte ze względu na branie produktów, to $F \in \mathcal{F}'$. □

Wniosek 3.3.9. Jeśli przestrzenie zgrubne X i Y są zgrubnie równoważne i przestrzeń X ma zbiór generatorów pewnej mocy, to przestrzeń Y ma zbiór generatorów tej samej mocy.

Dowód. Wystarczy w rodzinie generatorów T występującej w powyższym twierdzeniu zastąpić dwa dowolne elementy ich sumą. Trywialny przypadek, gdy T jest zbiorem jednoelementowym rozpatrujemy oddzielnie. □

Uwaga 3.3.10. Powyższy wniosek jest interesujący tylko dla struktur zgrubnych nieskończenie generowanych. Zgodnie bowiem z faktem 3.3.2, każda struktura zgrubna skończenie generowana jest monotoniczna.

Definicja 3.3.11. Powiemy, że przestrzeń metryczna X jest *przestrzenią geodezyjną*, gdy każde dwa punkty tej przestrzeni można połączyć krzywą $\gamma\colon [0, a] \to X$ będącą izometrią przedziału $[0, a]$ w X.

Twierdzenie 3.3.12. Struktura zgrubna na X jest monogeniczna wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zgrubnie równoważna geodezyjnej przestrzeni metrycznej.

Dowód. Na mocy powyższego wniosku, własność bycia przestrzenią monogeniczną jest zachowywana przez zgrubną równoważność przestrzeni.

Jeśli teraz (X, d) jest geodezyjną przestrzenią metryczną, to dla każdych dwóch różnych punktów x', x'' z X istnieje skończony ciąg punktów

$$x' = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = x'',$$

taki że $d(x_i, x_{i+1}) \leqslant 1$ dla każdego i oraz $m \leqslant d(x', x'') + 1$. W związku z tym zgrubna struktura na X jest generowana przez zbiór $E = \{(x, y)\colon d(x, y) \leqslant 1\}$, a zatem jest monogeniczna.

Teraz załóżmy przeciwnie, że na X dana jest monogeniczna struktura zgrubna $\mathcal{E}$, generowana przez $E \subset X \times X$. Skonstruujemy graf G następująco: wierzchołkami G będą punkty z X, zaś dwa różne wierzchołki x i y będą połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, y) \in E$. (Punktami w G nie są tylko wierzchołki, ale także *wszystkie* punkty z krawędzi.) Nadajmy każdej krawędzi długość 1 i wprowadźmy na G metrykę najkrótszej drogi oraz ograniczoną strukturę zgrubną odpowiadającą tej metryce.

Wówczas G jest zupełną przestrzenią geodezyjną. (Każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest od pewnego miejsca stały.) Zdefiniujmy przekształcenie $f\colon X \to G$ tak, że obrazem punktu z X jest odpowiadający mu wierzchołek grafu. Ponieważ f przekształca zbiór E w zbiór punktów w $G \times G$ oddalonych nie dalej niż 1 od przekątnej Δ_G, to f jest przekształceniem zgrubnym.

Podobnie, zdefiniujmy przekształcenie $g\colon G \to X$ tak, że obrazem punktu $g \in G$ jest punkt z X odpowiadający temu wierzchołkowi grafu G, który leży najbliżej punktu g. Punktom z G leżącym pośrodku krawędzi łączącej dwa wierzchołki przyporządkujmy dowolny z nich. Wówczas g jest przekształceniem zgrubnym, a ponadto złożenia $f \circ g$ oraz $g \circ f$ są bliskie identyczności, zatem X i G są zgrubnie równoważne. □

Z uwagi na tę równoważność, monogeniczne przestrzenie zgrubne bywają nazywane *zgrubnie geodezyjnymi.*

3.4. Podsumowanie

Faktem wartym podkreślenia jest to, że wszystkie metryzowalne struktury zgrubne są przeliczalnie generowane. Ponadto, jeśli struktura zgrubna jest skończenie generowana, to przestrzeń, na której jest określona, jest zgrubnie równoważna geodezyjnej przestrzeni metrycznej.

Możemy więc wszystkie struktury zgrubne podzielić na trzy rozłączne klasy:

1. monogeniczne
2. przeliczalnie generowane, nieposiadające skończonego zbioru generatorów
3. niemetryzowalne.

Bibliografia

[1] Ryszard Engelking, *Topologia ogólna*, t. 1 i 2, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1989.

[2] John Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, American Mathematical Society, 2003.

[3] Marcin Pilipczuk, *Uzwarcenie i korona Higsona*, praca licencjacka na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, 2007.