Алгебра и анализ
Том 31 (2019), №5

МАКСИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ИЗ BMO В BLO НА α-ДЕРЕВЬЯХ

© В. ВАСЮНИН, А. ОСЕНКОВСКИ, Л. СЛАВИН

Мы находим точную верхнюю функцию Беллмана для естественного диадического максимального оператора, действующего из пространства $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\mathrm{BLO}(\mathbb{R}^n)$. Как следствие нами показано, что норма естественного максимального оператора из BMO в BLO равна 1 при всех n, и такой же является норма классического диадического максимального оператора. Главный результат получается как частичное следствие теоремы для так называемых α-деревьев, которые обобщают диадические решётки. В этой постановке функция Беллмана обнаруживает интересную квази-периодическую структуру, зависящую от α, но допускает также и не зависящую от α мажоранту, и тем самым не зависящую от размерности оценку нормы оператора. Мы также получаем точное описание убывания нормы с ростом разности среднего значения функции на кубе и инфимума максимальной функции на этом кубе. Построена последовательность тестовых функций, на которой достигается норма оператора.

§1. Введение и описание основных результатов

Мы исследуем действие максимального оператора на пространстве BMO. В статье [3] Беннет, ДеВор и Шарпли показали, что максимальный оператор Харди–Литтлвуда отображает пространство BMO в себя. Беннет в своей работе [2] усилил этот результат, показав, что на самом деле этот оператор отображает пространство BMO в свой подкласс, называемый BLO (“bounded lower oscillation”). Доказательство Беннета элементарно, но полученные им оценки не являются точными. Насколько нам известно, точная операторная норма в такой постановке не сосчитана ни для какого максимального оператора. В настоящей работе мы проведём детальный анализ диадического максимального оператора, а также более

Ключевые слова: BMO, BLO, α-деревья, максимальный оператор, функция Беллмана, точные константы.

Первый и третий авторы поддержаны грантом 14-41-00010 Российского научного фонда.

общего класса максимальных операторов на деревьях, действующих из BMO в BLO. Начнём мы с необходимых определений.

Символом $\mathcal{D}$ мы будем обозначать семейство всех открытых диадических кубов в $\mathbb{R}^n$. Для заданного куба Q символ $\mathcal{D}(Q)$ обозначает семейство всех диадических кубов, содержащихся в Q. Символ $\langle\varphi\rangle_J$ будет использоваться для обозначения среднего локально интегрируемой функции φ по множеству J относительно меры Лебега. Если же для усреднения будет использоваться другая мера, скажем μ, то мы будем писать $\langle\varphi\rangle_{J,\mu}$. Итак,

$$\langle\varphi\rangle_J = \frac{1}{|J|}\int\limits_J \varphi, \qquad \langle\varphi\rangle_{J,\mu} = \frac{1}{\mu(J)}\int\limits_J \varphi\,d\mu.$$

BMO на $\mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n) = \Big\{\varphi \in L^2_{\mathrm{loc}} \colon \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^d} := \sup_{J\in\mathcal{D}} \big(\langle\varphi^2\rangle_J - \langle\varphi\rangle_J^2\big)^{1/2} < \infty\Big\}. \tag{1.1}$$

Мы будем также использовать обозначение $\mathrm{BMO}^d(Q)$, если супремум берётся по множеству $J \in \mathcal{D}(Q)$.

Диадический класс BLO на $\mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{BLO}^d(\mathbb{R}^n) = \Big\{\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}} \colon \|\varphi\|_{\mathrm{BLO}^d} := \sup_{J\in\mathcal{D}} \big(\langle\varphi\rangle_J - \inf_J \varphi\big) < \infty\Big\}. \tag{1.2}$$

(Здесь и далее, когда мы пишем inf какой-либо функции, подразумеваем, конечно, ess inf.) Класс BLO был введён Койфманом и Рохбергом а работе [4]. Легко видеть, что BLO $\subset$ BMO. Включение здесь строгое: например, функция $t \mapsto \log|t|$ содержится в $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, но не в $\mathrm{BLO}(\mathbb{R}^n)$. (Этот пример показывает также, что класс BLO не является линейным пространством и, в частности, не сохраняется при умножении на константу, поскольку функция $-\log|t|$ принадлежит BLO.) Полезная точка зрения на это заключается в следующем: согласно неравенству Джона–Ниренберга BMO-функция — это с точностью до мультипликативной постоянной логарифм A_∞-веса; с другой стороны, в работе [4] показано, что BLO-функция — это с точностью до неотрицательной мультипликативной постоянной логарифм A_1-веса.

Мы будем рассматривать два диадических максимальных оператора. Первый — это классическая диадическая максимальная функция, задаваемая формулой:

$$M\varphi(x) = \sup_{J\ni x;\, J\in\mathcal{D}} \langle|\varphi|\rangle_J.$$

Второй — это так называемый естественный аналог оператора M, в определении которого нет знака абсолютной величины под знаком усреднения:

$$N\varphi(x) = \sup_{J\ni x;\, J\in\mathcal{D}} \langle\varphi\rangle_J.$$

Очевидно, что операторы M и N совпадают на неотрицательных функциях.

Учитывая результаты работы Беннета [2], мы ожидаем, что оба оператора, как M, так и N переводят пространство BMO^d в BLO^d. Это может быть записано следующим образом: пусть $Q\in\mathcal{D}$, тогда

$$\langle M\varphi\rangle_Q \leqslant c_n\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n)} + \inf_Q M\varphi, \quad \langle N\varphi\rangle_Q \leqslant c_n\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n)} + \inf_Q N\varphi.$$

Сначала мы докажем неравенство для оператора N с точной константой c_n, причём BMO-норма будет считаться по кубу Q, а не по всему $\mathbb{R}^n$. После чего неравенство для оператора M с той же константой будет простым следствием:

$$\langle M\varphi\rangle_Q - \inf_Q M\varphi = \langle N|\varphi|\rangle_Q - \inf_Q N|\varphi| \leqslant c_n\||\varphi|\|_{\mathrm{BMO}^d(Q)} \leqslant c_n\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^d(Q)},$$

где последнее неравенство является следствием оценки

$$\langle\varphi^2\rangle_J - \langle|\varphi|\rangle_J^2 \leqslant \langle\varphi^2\rangle_J - \langle\varphi\rangle_J^2$$

для любого куба J. В §3 мы предъявим оптимизирующую последовательность неотрицательных функций, доказывающую неулучшаемость обоих неравенств.

Неравенство для нормы оператора N на самом деле является частным случаем более общего неравенства, связывающего величины $\langle N\varphi\rangle_Q$, $\inf_Q N\varphi$, $\langle\varphi\rangle_Q$ и $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^d(Q)}$. Теперь сформулируем основную теорему.

Теорема 1.1. *Пусть $Q\in\mathcal{D}$. Возьмём функцию $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которой $N\varphi$ не обращается тождественно в бесконечность на Q, и $\varphi|_Q\in \mathrm{BMO}^d(Q)$. Пусть $L=\inf_Q N\varphi$ и $t=\inf_Q N\varphi-\langle\varphi\rangle_Q$. Тогда*

$$\langle N\varphi\rangle_Q \leqslant L + \Phi_n\big(t\big)\,\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^d(Q)}, \tag{1.3}$$

где Φ_n — убывающая, выпуклая функция на промежутке $[0,\infty)$, удовлетворяющая условию

$$\Phi_n(k(2^{n/2}-2^{-n/2})) = 2^{-nk} \tag{1.4}$$

для всех неотрицательных целых чисел k. Значит, если $\varphi\in\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n)$, то $N\varphi\in\mathrm{BLO}$, и

$$\|N_{\mathcal{T}}\varphi\|_{\mathrm{BLO}^d(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.5}$$

Оба неравенства являются точными. Более того, оба неравенства остаются справедливыми, если оператор N заменить оператором M, причём неравенство (1.5) *остаётся точным при такой замене.*

Замечание 1.2. В §2 мы приведём оптимальную функцию $\Phi_n(t)$ для всех значений переменной t (а именно, $\Phi_n(t) = b(-t)$, где b — функция, задаваемая условиями (2.20)–(2.21) при $\alpha = 2^{-n}$); она выражается слишком сложно, чтобы быть полезной в контексте данной теоремы. Для этой функции Φ_n указанная точность неравенства (1.3) означает следующее: для любого диадического куба Q, любого вещественного числа L и любого неотрицательного числа t существует такая последовательность функций $\{\varphi_j\}$, что $\varphi_j|_Q \in \mathrm{BMO}^d(Q)$, $\|\varphi_j\|_{\mathrm{BMO}^d(Q)} = 1$, $\inf_Q N\varphi_j = L$, $\inf_Q N\varphi_j - \langle\varphi_j\rangle_Q = t$, и при этом

$$\lim_{j\to\infty} \langle N\varphi_j\rangle_Q = L + \Phi_n\bigl(t\bigr).$$

Аналогично точность неравенства (1.5) означает существование такой последовательности функций $\{\varphi_j\}$ из $\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n)$, для которой

$$\|\varphi_j\|_{\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n)} = 1 \quad \text{при всех} \quad j,$$

и

$$\|N\varphi_j\|_{\mathrm{BLO}^d(\mathbb{R}^n)} \to 1 \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Сформулированная выше теорема для диадического пространства BMO является частичным следствием более общей теоремы для специальных структур, которые мы называем α-деревьями. Эти структуры обобщают понятие диадических решёток. Они были введены первым и третьим авторами в статье [17] для получения точного неравенства Джона–Ниренберга в пространстве $\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n)$. Однако второй автор прежде использовал похожую структуру в работе [11] (она там называлась “α-splitting trees”) для получения точных максимальных неравенств слабого типа для диадического класса $A_1(\mathbb{R}^n)$. Доказательства в статьях [17] и [11], равно как и в настоящей работе опираются на беллмановские функции, построенные по соответствующим деревьям. Подобные вложенные структуры использовались в связи с функциями Беллмана также в работах Меласа [6], Меласа, Николидакиса и Ставропулоса [9]; (см. также работы Банюэлоса с Осенковским [1] и Осенковского [12]). Важное отличие от указанных работ состоит в том, что в них авторы предполагали деревья однородными, то есть каждый элемент порождал одинаковое количество потомков, и все они имели равную меру. В нашем определении (равно как и в работе [11]), число потомков не ограничивается, лишь бы они не были слишком малы по отношению к родителю.

Определение 1.3. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и $0<\mu(X)<\infty$. Пусть $\alpha\in(0,1/2]$. Семейство $\mathcal{T}$ измеримых подмножеств пространства X назовём α-деревом, если выполняются следующие условия.

(1) $X\in\mathcal{T}$.
(2) Для любого элемента $J\in\mathcal{T}$ найдётся такое подмножество $C(J)\subset\mathcal{T}$, что
  (a) $J=\bigcup_{I\in C(J)} I$,
  (b) элементы множества $C(J)$ попарно дизъюнктны с точностью до множеств меры ноль,
  (c) для меры любого элемента $I\in C(J)$ справедлива оценка $\mu(I)\geqslant \alpha\mu(J)$.
(3) $\mathcal{T}=\bigcup_m \mathcal{T}_m$, где $\mathcal{T}_0=\{X\}$, и $\mathcal{T}_{m+1}=\bigcup_{J\in\mathcal{T}_m} C(J)$.
(4) Семейство $\mathcal{T}$ дифференцирует пространство $L^1(X,\mu)$: если для каждого $x\in X$ символ J_k^x обозначает какой-либо элемент $\mathcal{T}_k$, содержащий x, то для любой функции $f\in L^1(X,\mu)$ и μ-почти любого x имеем $\lim_{k\to\infty}\langle f\rangle_{J_k^x,\mu}=f(x)$.

Заметим, что множество $C(J)$ обязано быть конечным. Элементы множества $C(J)$ мы будем называть детьми (потомками первого поколения) элемента J, а сам элемент J — их родителем. Отметим также, что множество $\mathcal{T}(J):=\{I\in\mathcal{T}\colon I\subset J\}$ является α-деревом на пространстве $(J,\mu|_J)$. Символом $\mathcal{T}_k(J)$ мы будем обозначать множество всех потомков k-го поколения элемента J; таким образом, $\mathcal{T}(J)=\bigcup_k \mathcal{T}_k(J)$.

Пусть $\alpha\in(0,1/2]$, и $\mathcal{T}$ — α-дерево на пространстве (X,μ). Мы определим соответствующие классы BMO и BLO, а также максимальные операторы следующим образом:

$$\varphi\in\mathrm{BMO}(\mathcal{T})\iff\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathcal{T})}:=\sup_{J\in\mathcal{T}}\{\langle\varphi^2\rangle_{J,\mu}-\langle\varphi\rangle_{J,\mu}^2\}^{1/2}<\infty,$$
$$\varphi\in\mathrm{BLO}(\mathcal{T})\iff\|\varphi\|_{\mathrm{BLO}(\mathcal{T})}:=\sup_{J\in\mathcal{T}}\{\langle\varphi\rangle_{J,\mu}-\inf_J\varphi\}<\infty,$$
$$M_{\mathcal{T}}\varphi(x)=\sup_{J\ni x;J\in\mathcal{T}}\langle|\varphi|\rangle_J,\quad N_{\mathcal{T}}\varphi(x)=\sup_{J\ni x;J\in\mathcal{T}}\langle\varphi\rangle_J.$$

С учётом этих определений мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.4. *Пусть (X,μ) — пространство с мерой, $\alpha\in(0,1/2]$, $\mathcal{T}$ — α-дерево на X. Возьмём $K\in\mathcal{T}$ и функцию $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, для которой $N_{\mathcal{T}}\varphi$ не тождественно бесконечна на K, и $\varphi|_K\in\mathrm{BMO}\big(\mathcal{T}(K)\big)$. Положим $L=\inf_K N_{\mathcal{T}}\varphi$ и $t=\inf_K N_{\mathcal{T}}\varphi-\langle\varphi\rangle_{K,\mu}$. Тогда*

$$\langle N_{\mathcal{T}}\varphi\rangle_{K,\mu}\leqslant L+\mathcal{F}_\alpha\big(t\big)\,\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathcal{T}(K))},\tag{1.6}$$

где $\mathcal{F}_\alpha$ — убывающая выпуклая функция на промежутке $[0,\infty)$, удовлетворяющая условию

$$\mathcal{F}_\alpha\Big(k\big(\alpha^{-1/2}-\alpha^{1/2}\big)\Big)=\alpha^k \tag{1.7}$$

для всех неотрицательных целых чисел k. В частности, $N_\mathcal{T}\varphi \in \mathrm{BLO}(\mathcal{T})$, и

$$\|N_\mathcal{T}\varphi\|_{\mathrm{BLO}(\mathcal{T})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathcal{T})}. \tag{1.8}$$

Оба неравенства остаются справедливыми, если оператор $N_\mathcal{T}$ заменить оператором $M_\mathcal{T}$.

Замечание 1.5. Полагая в данной теореме $\alpha = 2^{-n}$ и $\mathcal{F}_\alpha = \Phi_n$, мы немедленно получаем неравенства из теоремы 1.1. Однако мы здесь не говорим о точности неравенств, и, таким образом, для диадического случая она должна будет устанавливаться отдельно. Если ограничиться рассмотрением случая мер, не содержащих атомов, как это делается в работах Меласа с соавторами (см., например, работы [6, 7, 8, 9]) и потребовать, чтобы каждый элемент K нашего дерева содержал бы ребёнка, мера которого в точности равна $\alpha\mu(K)$, то для такого дерева можно построить подпирающую последовательность для неравенства в теореме 1.4. Однако при нашем определении можно построить дерево, для которого неравенство не будет точным (то есть, неулучшаемым).

Закончим этот параграф краткой историей нашего проекта. Он вырос из близкого по духу проекта, посвящённого точным оценкам максимального оператора, действующего на классе A_∞. Как показано в статье [13] (см. также статью [14]), ограниченность оператора $N\colon \mathrm{BMO}\to\mathrm{BLO}$ равносильна ограниченности оператора $M\colon A_\infty \to A_1$ (доказательство в статье [13] приводится для недиадического случая, но оно работает для любого максимального оператора). Однако точность в любом из соответствующих неравенств не переносится на второе неравенство. Таким образом, чтобы получить точные оценки, нужно исследовать эти вопросы отдельно. Оказалось, что рассмотренный тут вопрос про оператор $N\colon \mathrm{BMO}\to\mathrm{BLO}$ легче с вычислительной точки зрения, и поэтому лучше начать именно с него. Вопрос об операторе $M\colon A_\infty\to A_1$ будет рассмотрен позже в отдельной работе.

Остальная часть статьи организована следующим образом. В §2 будет определена функция Беллмана для диадической задачи. Мы определим также понятие α-вогнутой функции и покажем, что подходящее семейство таких функций даёт мажоранту для левой части неравенства (1.6) и тем самым мажорирует диадическую функцию Беллмана. Потом будет приведена явная формула для такого семейства функций, однако проверка (технически довольно сложная) α-вогнутости функций из этого семейства отложена до §4. После проведения такой проверки это семейство гарантирует выполнение верхних оценок в теоремах 1.1 и 1.4. В §3, мы показываем, что диадическая мажоранта на самом деле является диадической функцией Беллмана. Тем самым мы устанавливаем точность констант в утверждениях теоремы 1.1. Наше доказательство использует абстрактные свойства вогнутости функции Беллмана, а не конкретный вид подпирающих примеров. Тем не менее мы приведём подпирающую последовательность функций для оператора N. В §4 мы проверяем α-вогнутость, анонсированную в §2. И наконец, в §5 мы поясняем, как был построен тот кандидат на роль функции Беллмана, который был приведён в §2.

§2. Функция Беллмана, α-вогнутость и основная беллмановская теорема

Чтобы доказать теорему 1.1, мы найдём функцию Беллмана, которая является решением соответствующей экстремальной задачи. Чтобы определить эту функцию, давайте рассмотрим следующую параболическую область на плоскости:

$$\Omega = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant x_1^2 + 1\}.$$

Символами Γ_0 и Γ_1 обозначим соответственно нижнюю и верхнюю границы области Ω:

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2)\colon x_2 = x_1^2\}, \quad \Gamma_1 = \{(x_1, x_2)\colon x_2 = x_1^2 + 1\}.$$

Областью определения нашей функции Беллмана будет следующее множество в $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x_1, x_2, L)\colon (x_1, x_2) \in \Omega,\ x_1 \leqslant L\}.$$

Часто точку (x_1, x_2, L) мы будем записывать в виде (x, L), где $x \in \mathbb{R}^2$.

Для каждой точки $(x, L) \in S$ и куба $Q \in \mathcal{D}$ мы определим следующее специальное подмножество функций на $\mathbb{R}^n$, сужение которых на Q принадлежит $\mathrm{BMO}^d(Q)$:

$$\begin{aligned} E_{x,L,Q} = \big\{\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\ \varphi|_Q \in \mathrm{BMO}^d(Q),\ \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^d(Q)} \leqslant 1,& \\ \langle\varphi\rangle_Q = x_1,\ \langle\varphi^2\rangle_Q = x_2,\ \sup_{R \supset Q;\, R \in \mathcal{D}} \langle\varphi\rangle_R = L\big\}.& \end{aligned} \tag{2.1}$$

Элементы этого множества мы будем называть тест-функциями. Нетрудно показать, что множество $E_{x,L,Q}$ не пусто для любых $Q \in \mathcal{D}$ и $(x, L) \in S$. На самом деле подходящие тест-функции можно построить так, что они будут принимать не более двух значений на кубе Q и ещё одно значение вне его.

Теперь мы определим следующую *функцию Беллмана* на S:

$$\boldsymbol{B}^n(x,L) = \sup\{\langle N\varphi\rangle_Q : \varphi \in E_{x,L,Q}\}. \tag{2.2}$$

Ряд различных свойств этой функции вытекает непосредственно из определения, и мы их выведем ниже в этом параграфе, см. п. 2.1. (Одно простое наблюдение заключается в том, что на самом деле функция $\boldsymbol{B}^n$ не зависит от куба Q, поскольку от одного куба к другому можно перейти линейной замено переменных.) Определение (2.1)–(2.2) совмещает две хорошо известные беллмановские постановки: определение функции Беллмана для диадического максимального оператора на пространстве L^2 из работы [10] и определение функции Беллмана для произвольного интегрального функционала на пространстве BMO с квадратичной нормой, появившееся впервые в работе [15], а затем развитое в полную силу в [5] и последовавших работах.

Функция Беллмана, которая была опеределена в статье Назарова и Трейля [10], не была там вычислена. Это было сделано Меласом в статье [6] (для всех L^p, $p > 1$). Вычисления Меласа базируются на тщательном анализе комбинаторных свойств самого оператора. Другой подход, основаный на решении уравнения в частных производных был применён в статье [16]; он же будет использован и здесь (подробности см. в §5).

Читатель может удивиться, почему в определении функции Беллмана для оператора N из BMO в BLO мы не фиксируем значение $\inf_Q N\varphi$. Следующее простое наблюдение даёт ответ на этот вопрос.

Лемма 2.1. *Зафиксируем $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, и пусть $\mathcal{T}$ — α-дерево на пространстве (X,μ). Возьмём произвольную функцию $\varphi \in L^1(X)$ и любой элемент $I \in \mathcal{T}$. Положим*

$$L = \sup\{\langle\varphi\rangle_{R,\mu} : R,\ R \in \mathcal{T},\ R \supset I\}.$$

Тогда

$$L = \inf_I N_{\mathcal{T}}\varphi.$$

Доказательство. В одну сторону неравенство очевидно: $L \leqslant \inf_I N_{\mathcal{T}}\varphi$. Чтобы доказать противоположное неравенство, предположим, что

$$L < \inf_I N_{\mathcal{T}}\varphi.$$

Тогда μ-почти любая точка из I принадлежит некоторому максимальному подмножеству $J \subset I$ из нашего дерева, на котором $\langle\varphi\rangle_{J,\mu} > L$. Пусть $\{J_k\}$ — набор этих максимальных элементов. Они покрывают всё множество I

и дизъюнктны с точностью до множества меры ноль. Поэтому

$$\langle\varphi\rangle_{I,\mu} = \frac{1}{\mu(I)}\sum_k \mu(J_k)\langle\varphi\rangle_{J_k,\mu} > \frac{1}{\mu(I)}\sum_k \mu(J_k)L = L,$$

что противоречит неравенству $\langle\varphi\rangle_{I,\mu} \leqslant L$, которое выполняется по определению величины L. $\square$

Замечание 2.2. С тех пор как впервые в работе [10] при опеделении функции Беллмана была фиксирована "внешняя максимальная функция" L, это стало уже каноническим приёмом. Утверждение леммы 2.1 делает этот подход особенно полезным там, где используется инфимум максимальной функции, как, например, в BLO или A_1. Отметим, что данный результат остаётся справедливым, если мы заменим оператор N обычным максимальным оператором M. Однако данное равенство неверно, вообще говоря, для обычного (не диадического) максимального оператора Харди–Литтлвуда.

В силу леммы 2.1 для того, чтобы показать, что оператор N отображает BMO^d в BLO^d, необходимо и достаточно проверить, что

$$\boldsymbol{B}^n(x, L) \leqslant L + c$$

для некоторого числа c. Более того, наилучшая функция Φ из теоремы 1.1 задаётся равенством

$$\Phi_n(t) = \sup_{(x,L)\in S;\ L-x_1=t} \big(\boldsymbol{B}^n(x;L) - L\big). \tag{2.3}$$

2.1. Свойства функции Беллмана. Мы отметим три основных свойства функции $\boldsymbol{B}^n$. Во-первых, у нас есть априорное граничное условие.

Лемма 2.3. *При всех $x_1 \leqslant L$ выполняется соотношение $\boldsymbol{B}^n(x_1, x_1^2, L) = L$.*

Доказательство. Каждая функция φ из $E_{(x_1,x_1^2),Q,L}$ почти всюду на Q принимает постоянное значение $x_1, x_1 \leqslant L$, поэтому

$$N\varphi|_Q = \inf_Q N\varphi = L. \qquad \square$$

Во-вторых, мы покажем, что функция $\boldsymbol{B}^n$ обладает свойством специальной ограниченной вогнутости на множестве S.

Лемма 2.4. *Возьмём $x^-, x^+ \in \Omega$ и положим $x = (1-2^{-n})x^- + 2^{-n}x^+$. Для любого $L \geqslant x_1$ определим $L^\pm = \max\{x_1^\pm, L\}$. Тогда, если $x \in \Omega$, то*

$$\boldsymbol{B}^n(x, L) \geqslant (1-2^{-n})\boldsymbol{B}^n(x^-, L^-) + 2^{-n}\boldsymbol{B}^n(x^+, L^+). \tag{2.4}$$

Доказательство. Зафиксируем $Q \in \mathcal{D}$. Пусть $\{\varphi_j^\pm\}$ — последовательность функций из $E_{x^\pm,L^\pm,Q}$, удовлетворяющая предельному соотношению

$$\langle N\varphi_j^\pm\rangle_Q \to \boldsymbol{B}^n(x^\pm, L^\pm).$$

Пусть $\{Q_k\}_{k=1}^{2^n}$ — первое поколение диадических кубов, содержащихся в Q. Зададим новую последовательность функций $\{\varphi_j\}$ на $\mathbb{R}^n$ следующим образом: при всех j на кубах Q_k при $k < 2^n$ мы положим φ_j равной функции $\varphi_j^-|_Q$, отскалированной на Q_k, а на последнем кубе Q_{2^n} в качестве φ_j возьмём отскалированную функцию $\varphi_j^+|_Q$. На дополнении куба Q мы положим просто $\varphi_j = L$. По построению имеем $\varphi_j \in E_{x,L,Q}$. Более того,

$$\boldsymbol{B}^n(x, L) \geqslant \langle N\varphi_j\rangle_Q = (1 - 2^{-n})\langle N\varphi_j^-\rangle_Q + 2^{-n}\langle N\varphi_j^+\rangle_Q.$$

Поскольку при $j \to \infty$ правая часть стремится к $(1 - 2^{-n})\boldsymbol{B}^n(x^-, L^-) + 2^{-n}\boldsymbol{B}^n(x^+, L^+)$, доказательство закончено. □

Наше третье наблюдение состоит в том, что функция $\boldsymbol{B}^n$ аддитивно однородна. Рассмотрим следующий оператор сдвига в $\mathbb{R}^2$: для любого вещественного числа a положим

$$T_a(x_1, x_2) = (x_1 - a, x_2 - 2ax_1 + a^2). \tag{2.5}$$

Ясно, что при любом a оператор T_a является биекцией области Ω.

Лемма 2.5. $\boldsymbol{B}^n(x, L) = L + \boldsymbol{B}^n(T_L x, 0)$.

Доказательство. Если $\varphi \in E_{x,L,Q}$, то $\widetilde{\varphi} := \varphi - a \in E_{\widetilde{x},\widetilde{L},Q}$, где $(\widetilde{x}, \widetilde{L}) = (T_a x, L - a)$. Поскольку $N\widetilde{\varphi} = N\varphi - a$, справедливо равенство

$$\boldsymbol{B}^n(\widetilde{x}, \widetilde{L}) = \boldsymbol{B}^n(x, L) - a.$$

Требуемое равенство получается при $a = L$. □

Пользуясь леммой 2.5, мы можем переписать равенство (2.3) в виде:

$$\Phi_n(t) = \sup_{x\in\Omega,\ x_1=-t} \boldsymbol{B}^n(x, 0). \tag{2.6}$$

2.2. $\boldsymbol{\alpha}$-вогнутость и беллмановская индукция. Мы будем использовать следующее определение из работы [17].

Определение 2.6. Пусть $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Функция F в области Ω называется α-вогнутой, если неравенство

$$F((1 - \beta)x^- + \beta x^+) \geqslant (1 - \beta)F(x^-) + \beta F(x^+) \tag{2.7}$$

выполняется при любом β из промежутка $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$ и для любых двух точек $x^\pm$ из Ω, для которых их выпуклая комбинация $(1-\beta)x^- + \beta x^+$ тоже лежит в области Ω.

Нам потребуется также следующая простая лемма, элементарное доказательство которой можно найти в работе [17]. (Более точно, это — первый шаг доказательства леммы 2.4 из этой статьи.)

Лемма 2.7. *Пусть $\alpha \in (0,1/2]$ и $\mathcal{T}$ — α-дерево на пространстве (X,μ). Пусть $\varphi \in \mathrm{BMO}(\mathcal{T})$. Если функция F является α-вогнутой на Ω, то для любого элемента $I \in \mathcal{T}$ выполняется неравенство*

$$F\big(\langle\varphi\rangle_{I,\mu}, \langle\varphi^2\rangle_{I,\mu}\big) \geqslant \frac{1}{\mu(I)} \sum_{J\in\mathcal{T}_1(I)} \mu(J)\, F\big(\langle\varphi\rangle_{J,\mu}, \langle\varphi^2\rangle_{J,\mu}\big). \tag{2.8}$$

Наша следующая лемма показывает, как α-вогнутые функции могут использоваться для оценки функционала $\langle N_{\mathcal{T}}\varphi\rangle_{K,\mu}$ for $K \in \mathcal{T}$ в терминах величин $\langle\varphi\rangle_{K,\mu}$, $\langle\varphi^2\rangle_{K,\mu}$, $\inf_K N_{\mathcal{T}}\varphi$ и (неявно) $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathcal{T}(K))}$. Описанный в лемме процесс часто называют беллмановской индукцией.

Лемма 2.8. *Пусть $\alpha \in (0,1/2]$, и $\mathcal{T}$ — α-дерево на пространстве (X,μ). Предположим, что $\{A(\,\cdot\,;L)\}_{L\in\mathbb{R}}$ — это семейство функций на области Ω, для которого при любом L выполняются следующие условия.*

(1) *Функция $A(\,\cdot\,;L)$ является α-вогнутой на Ω.*
(2) *При всех $x_1 \geqslant L$ справедливо равенство $A(x;L) = A(x;x_1)$.*
(3) *При всех $x_1 \leqslant L$ выполняется неравенство $A(x;L) \geqslant L$.*

Если $K \in \mathcal{T}$ и функция $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ такова, что $N_{\mathcal{T}}\varphi$ не обращается тождественно в бесконечность на K, $\varphi|_K \in \mathrm{BMO}\big(\mathcal{T}(K)\big)$ и $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathcal{T}(K))} \leqslant 1$, то

$$\langle N_{\mathcal{T}}\varphi\rangle_{K,\mu} \leqslant A(\langle\varphi\rangle_{K,\mu}, \langle\varphi^2\rangle_{K,\mu}; \inf_K N_{\mathcal{T}}\varphi). \tag{2.9}$$

Доказательство. Для произвольного элемента $J \in \mathcal{T}(K)$ будем писать

$$P_J(\varphi) = (\langle\varphi\rangle_{J,\mu}, \langle\varphi^2\rangle_{J,\mu}), \quad L_J(\varphi) = \sup_{J\subset R\in\mathcal{T}} \langle\varphi\rangle_{R,\mu}.$$

Отметим, что если $I \in \mathcal{T}(K)$ и $J \in \mathcal{T}_1(I)$, то $L_J(\varphi) = \max\{L_I(\varphi), \langle\varphi\rangle_{J,\mu}\}$.

Зафиксируем $L \in \mathbb{R}$. Используя сперва лемму 2.7 и свойство (1) функции A, а затем свойство (2), и повторяя эту процедуру m раз, а в конце применяя свойство (3), мы получим следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} A(P_K(\varphi); L_K(\varphi)) &\geqslant \frac{1}{\mu(K)} \sum_{J\in\mathcal{T}_1(K)} \mu(J)\, A(P_J(\varphi); L_K(\varphi)) \\ &= \frac{1}{\mu(K)} \sum_{J\in\mathcal{T}_1(K)} \mu(J)\, A(P_J(\varphi); L_J(\varphi)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \frac{1}{\mu(K)} \sum_{J\in\mathcal{T}_1(K)} \sum_{I\in\mathcal{T}_1(J)} \mu(I)\, A(P_I(\varphi); L_I(\varphi))\\
&= \frac{1}{\mu(K)} \sum_{J\in\mathcal{T}_2(K)} \mu(J)\, A(P_J(\varphi); L_J(\varphi))\\
&\dots\\
&\geqslant \frac{1}{\mu(K)} \sum_{J\in\mathcal{T}_m(K)} \mu(J)\, A(P_J(\varphi); L_J(\varphi))\\
&\geqslant \frac{1}{\mu(K)} \sum_{J\in\mathcal{T}_m(K)} \mu(J)\, L_J(\varphi).
\end{aligned}
$$

Для каждого $m \geqslant 0$ рассмотрим условное ожидание φ_m функции φ относительно σ-алгебры, порождённой элементами $\mathcal{T}_m(K)$, то есть

$$\varphi_m = \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{T}_m(K)) = \sum_{J\in\mathcal{T}_m(K)} \langle\varphi\rangle_{J,\mu}\, \chi_J.$$

Тогда для каждого элемента $J \in \mathcal{T}_m(K)$ величина $L_J(\varphi)$ совпадает со значением функции $N_\mathcal{T}(\varphi_m)$, которое постоянно на J. Следовательно,

$$A(P_K(\varphi); L_K(\varphi)) \geqslant \langle N_\mathcal{T}(\varphi_m)\rangle_{K,\mu},$$

Лемма 2.1 гарантирует равенство $L_K(\varphi) = \inf_K N_\mathcal{T}\varphi$. А так как последовательность функций $N_\mathcal{T}(\varphi_m)$ μ-п.в. возрастает к функции $N_\mathcal{T}\varphi$, то неравенство (2.9) следует из теоремы о монотонной сходимости под знаком интеграла. $\square$

2.3. Беллмановский кандидат. Теперь мы предъявим семейство функций $\{A(\,\cdot\,; L)\}_{L\in\mathbb{R}}$, удовлетворяющее условиям леммы 2.8. Вскоре мы увидим, что достаточно иметь только одну функцию из семейства, соответствующую $L = 0$. Чтобы задать эту функцию, нам потребуется разбить область Ω в объединение подобластей специального вида.

Пусть

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}, \quad p_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} - 1; \quad p_k = p_1 - (k-1)\tau,\ k \geqslant 1. \tag{2.10}$$

Используя параболический сдвиг T_a, определённый формулой (2.5), можем записать: $(p_k, p_k^2 + 1) = T_{(k-1)\tau}(p_1, p_1^2 + 1)$.

Определим

$$
\begin{aligned}
&\Omega_+ = \{x \in \Omega\colon x_1 \geqslant 0\},\\
&\Omega_0 = \{x \in \Omega\colon x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 1\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Omega_1 = \{x \in \Omega\colon 1 \leqslant x_2 \leqslant (2p_1+\tau)x_1 - p_1^2 - \tau p_1 + 1\},\\
&\Omega_2 = \{x \in \Omega\colon (2p_1+\tau)x_1 - p_1^2 - \tau p_1 + 1 \leqslant x_2 \leqslant -2\tau x_1 - \tau^2 + 1\},\\
&\Omega_{2k+1} = T_{k\tau}\Omega_1,\ k \geqslant 1,\\
&\Omega_{2k+2} = T_{k\tau}\Omega_2,\ k \geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Рисунок 1 показывает несколько первых областей при $\alpha = \frac{1}{4}$.

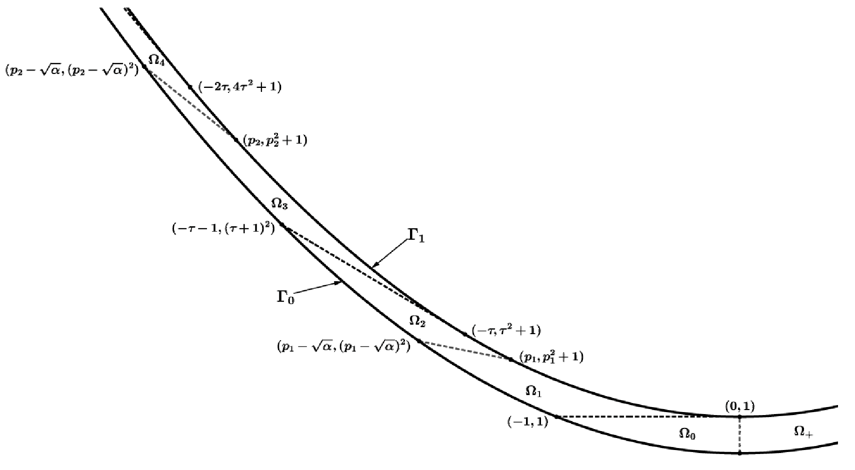

Рис. 1. Разбиение $\Omega = ... \cup \Omega_4 \cup \Omega_3 \cup \Omega_2 \cup \Omega_1 \cup \Omega_0 \cup \Omega_+$ при $\alpha = \frac{1}{4}$.

Будет полезно также использовать обозначение

$$\Omega_- = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k.$$

Тогда $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_0 \cup \Omega_+$.

Теперь мы определим функцию B на Ω, которая будет использована для построения семейства $\{A(\,\cdot\,; L)\}$.

В области Ω_+ положим

$$B(x) = x_1 + \sqrt{x_2 - x_1^2}. \tag{2.12}$$

В области Ω_0 функцию B зададим равенством

$$B(x) = x_1 + \sqrt{x_2}. \tag{2.13}$$

Чтобы определить B в области Ω_1 введём две вспомогательные функции

$$v(s) = \frac{1}{2}\Big[3s - \frac{1}{s}\Big] - 1 \quad \text{и} \quad u(s) = v(s) - s \tag{2.14}$$

на промежутке $s \in [\sqrt{\alpha}, 1]$ и рассмотрим семейство прямолинейных отрезков $\{\ell_s\}$, соединяющих точки $(u(s), u^2(s))$ и $(v(s), v^2(s)+1)$. Нетрудно видеть, что эти отрезки фолиируют область Ω_1, то есть они целиком содержатся в Ω_1, и для каждой точки x из этой области найдётся единственное число $s = s(x) \in [\sqrt{\alpha}, 1]$, для которого $x \in \ell_s$. Теперь положим

$$B(x) = \frac{s}{2}\,(1+s^2)\,\frac{x_1 - u}{v - u} = \frac{1}{2}\,(1+s^2)(x_1 - u). \tag{2.15}$$

Заметим, что функция B линейна вдоль каждого отрезка ℓ_s.

Чтобы определить функцию B в области Ω_2, мы введём следующие вспомогательные функции

$$v(s) = \frac{1}{2}\Big[\frac{s}{\alpha} + \frac{\alpha}{s}\Big] - \tau - 1 \quad \text{и} \quad u(s) = v(s) - \frac{\alpha}{s} \tag{2.16}$$

на промежутке $s \in [\alpha, \sqrt{\alpha}]$. Опять рассмотрим семейство прямолинейных отрезков $\{\ell_s\}$, соединяющих точки $(u(s), u^2(s))$ и $(v(s), v^2(s)+1)$. Как и раньше, легко проверить, что эти отрезки фолиируют область Ω_2. Пусть $s = s(x)$ — это то единственное число из интервала $[\alpha, \sqrt{\alpha}]$, для которого $x \in \ell_s$. Теперь мы положим

$$B(x) = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{s^2}\right)\frac{x_1 - u}{v - u} = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{s^2}{\alpha^2}\right)(x_1 - u). \tag{2.17}$$

Опять же функция B линейна на каждом из отрезков ℓ_s.

Для точек $x \in \Omega_{2k+1} \cup \Omega_{2k+2}$, $k \geqslant 1$, функцию определим с помощью нашего параболического сдвига:

$$B(x) = \alpha^k\, B(T_{-k\tau} x). \tag{2.18}$$

Соответственно зададим и вспомогательные функции:

$$s(x) = \alpha^k s(T_{-k\tau} x), \quad v(s) = v\Big(\frac{s}{\alpha^k}\Big) - k\tau, \quad u(s) = u\Big(\frac{s}{\alpha^k}\Big) - k\tau. \tag{2.19}$$

Таким образом, $s(x) \in [\alpha^{k+\frac{1}{2}}, \alpha^k]$, если $x \in \Omega_{2k+1}$, и $s(x) \in [\alpha^{k+1}, \alpha^{k+\frac{1}{2}}]$, если $x \in \Omega_{2k+2}$. При заданных так функциях u и v каждая точка $x \in \Omega_{2k+1} \cup \Omega_{2k+2}$ лежит на единственном отрезке ℓ_s, который соединяет точки (u, u^2) и (v, v^2+1), а функция B линейна вдоль ℓ_s. Эти отрезки переходят друг в друга под действием параболического сдвига:

$$\ell_s = T_{k\tau}\big(\ell_{s\alpha^{-k}}\big).$$

Теперь приведём список некоторых свойств функции B.

Лемма 2.9. *Пусть* $b(p) = B(p, p^2 + 1)$. *Тогда*

$$b(p) = \begin{cases} p + 1, & p \geqslant 0; \\ \alpha^k f(p + k\tau + 1), & p_{k+1} \leqslant p \leqslant -k\tau, \ k \geqslant 0; \\ \alpha^k (p + k\tau + 1), & -k\tau \leqslant p \leqslant p_k, \ k \geqslant 1, \end{cases} \tag{2.20}$$

где f *— функция, заданная формулой*

$$f(y) = \frac{1}{27}\left(2y^3 + 2y^2\sqrt{y^2+3} + 9y + 6\sqrt{y^2+3}\right). \tag{2.21}$$

Доказательство. Пусть $P = (p, p^2 + 1)$. Тогда $P \in \Omega_- \cup \Omega_+$. Если $P \in \Omega_+$, то по определению $b(p) = p + 1$, как и утверждается в первой строке формулы (2.20).

Если $P \in \Omega_1$, то из формул (2.14) и (2.15) следует, что $p = \frac{1}{2}\left(3s - \frac{1}{s}\right) - 1$, $b(p) = \frac{1}{2}(s + s^3)$, где $s = s(P)$. Нетрудно записать b явно в терминах p. В результате мы увидим, что $b(p) = f(p + 1)$, где функция f задаётся выражением (2.21). Принимая во внимание условие (2.18), мы получаем вторую строку формулы (2.20).

Если $P \in \Omega_2$, то b является линейной функцией аргумента p. А значит то же самое справедливо в каждой области Ω_{2k}. Немного вычислений, и мы приходим к формуле $b(p) = \alpha^k(p + k\tau + 1)$ для $P \in \Omega_{2k}$, $k \geqslant 1$, что и завершает доказательство. □

Лемма 2.10. *Функция* B *возрастает по переменной* x_2.

Доказательство. Это утверждение очевидно в области $\Omega_+ \cup \Omega_0$. Если $x \in \Omega_1$, то непосредственное дифференцирование функции B из формулы (2.15) по переменной s даёт выражение

$$2\frac{\partial B}{\partial s} = -u_s(1 + s^2) + 2s(x_1 - u).$$

Во-первых, $0 \leqslant x_1 - u \leqslant s$. Кроме того, дифференцируя (2.14), мы получаем $u_s = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{s^2})$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial B}{\partial s} \leqslant -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)(1 + s^2) + 2s^2 &= \frac{1}{2s^2}\left(4s^4 - (1 + s^2)^2\right) \\ &= \frac{1}{2s^2}(s^2 - 1)(3s^2 + 1) \leqslant 0, \end{aligned}$$

так как $s \leqslant 1$. Геометрическая картина фолиации непосредственно показывает, что s убывает с ростом x_2, откуда мы делаем вывод, что функция B возрастает по переменной x_2.

Если $x \in \Omega_2$, рассуждения остаются точно такими же, за исключением того, что s всюду заменяется на $\frac{\alpha}{s}$. Наконец, для остальной части области Ω заключение следует из формулы (2.18), поскольку только вторая координата вектора $T_{-k\tau}x$ зависит от x_2, и она возрастает по x_2. □

Основное свойство функции B содержится в следующей лемме. Её доказательство (технически довольно громоздкое) будет приведено в §4.

Лемма 2.11. *Функция B, заданная формулами* (2.11)–(2.18), *является α-вогнутой на области Ω.*

А теперь мы определим семейство $\{A(\,\cdot\,;L)\}$ и проверим его свойства. Пусть $L \in \mathbb{R}$, положим

$$A(x;L) = L + B(T_L x) = L + B(x_1 - L, x_2 - 2x_1 L + L^2). \tag{2.22}$$

Лемма 2.12. *Семейство* (2.22) *удовлетворяет условиям* (1)–(3) *леммы* 2.8.

Доказательство.

(1) Проверяем определение 2.6 для функции $A(\,\cdot\,;L)$ при произвольном $L \in \mathbb{R}$, используя при этом определение (2.22), линейность оператора T_a и лемму 2.11:

$$\begin{aligned} A((1-\beta)x^- + \beta x^+;L) &= L + B\big(T_L((1-\beta)x^- + \beta x^+)\big) \\ &= L + B((1-\beta)T_L x^- + \beta T_L x^+) \\ &\geqslant (1-\beta)(L + B(T_L x^-)) + \beta(L + B(T_L x^+)) \\ &= (1-\beta)A(x^-;L) + \beta A(x^+;L). \end{aligned}$$

(2) Если $x_1 \geqslant L$, то $T_L x \in \Omega_+$, и поэтому

$$\begin{aligned} A(x;L) &= L + \big(x_1 - L + \sqrt{(x_2 - 2x_1 L + L^2) - (x_1 - L)^2}\big) \\ &= x_1 + \sqrt{x_2 - x_1^2} = x_1 + B(0, x_2 - x_1^2) = A(x;x_1). \end{aligned}$$

(3) Так как из формул (2.12)–(2.18) очевидно, что $B \geqslant 0$ на Ω, то

$$A(x;L) \geqslant L.$$

□

Теперь мы готовы доказывать неравенства теоремы 1.4, и тем самым будет доказана теорема 1.1.

Доказательство теоремы 1.4. Полагая в лемме 2.8

$$x_1 = \langle\varphi\rangle_{J,\mu}, \quad x_2 = \langle\varphi^2\rangle_{J,\mu}, \quad L = \inf_J N_{\mathcal{T}}\varphi \quad \text{и} \quad t = L - x_1,$$

мы получим

$$\langle N_{\mathcal{T}}\varphi\rangle_{J,\mu} \leqslant A(x;L) = L + B(T_L x) \leqslant L + B(-t, t^2+1) = L + b(-t),$$

где во втором неравенстве использована лемма 2.10, а функция b определена соотношениями (2.20) и (2.21). Таким образом, мы можем взять

$$\mathcal{F}_\alpha(t) = b(-t).$$

Отметим, что $\mathcal{F}_\alpha(k\tau) = b(-k\tau) = \alpha^k$. Элементарную проверку того факта, что функция b возрастает и выпукла на интервале $[0,\infty)$, а, следовательно, и того, что функция $\mathcal{F}_\alpha$ убывает и выпукла, мы оставим в качестве упражнения для читателя. □

2.4. Основная беллмановская теорема. Как было отмечено во введении, неравенства теоремы 1.1 (но не их неулучшаемость) непосредственно следуют из только что доказанной теоремы 1.4. Однако теперь мы можем доказать более сильный результат, который полностью выявляет связь между функцией B (и, тем самым, семейством $\{A(\,\cdot\,;L)\}_{L\in\mathbb{R}}$) и функцией Беллмана $\boldsymbol{B}^n$, заданной выражением (2.2). Этот результат можно считать основным результатом данной работы.

Теорема 2.13. *Пусть* $(x,L)\in S$, *и* $A^n(x;L)$ — *функция, заданная условиями* (2.11)–(2.18) *и* (2.22), *где* $\alpha = 2^{-n}$. *Тогда*

$$\boldsymbol{B}^n(x,L) = A^n(x;L) \quad \text{для всех точек } (x,L)\in S.$$

Как это обычно бывает, доказательство этой теоремы складывается из доказательства двух следующих лемм.

Лемма 2.14. $\boldsymbol{B}^n(x,L) \leqslant A^n(x;L)$ *для всех точек* $(x,L)\in S$.

Доказательство. Фиксируем точку $(x,L)\in S$ и произвольный куб Q. Как уже отмечалось, множество $E_{x,L,Q}$ непусто. Пусть R — диадический родитель куба Q. Возьмём функцию $\varphi\in E_{x,L,Q}$ и определим новую функцию $\widetilde{\varphi}$, положив $\widetilde{\varphi} = \varphi\,\chi_Q + a\,\chi_{R\setminus Q}$, где

$$a := \frac{L|R| - x_1|Q|}{|R\setminus Q|} = \frac{2^n L - x_1}{2^n - 1}.$$

Пусть $\mathcal{T}$ — диадическая решётка кубов в R. Тогда $\mathcal{T}$ — это 2^{-n}-дерево на R (с мерой Лебега), и $N\varphi|_Q = N_{\mathcal{T}}\widetilde{\varphi}|_Q$. Лемма 2.8 с $K=Q$ даёт оценку

$$\langle N\varphi\rangle_Q = \langle N_{\mathcal{T}}\widetilde{\varphi}\rangle_Q \leqslant A^n(\langle\widetilde{\varphi}\rangle_Q, \langle\widetilde{\varphi}^2\rangle_Q; \inf_Q N_{\mathcal{T}}\widetilde{\varphi}) = A^n(x;L).$$

Теперь осталось взять супремум левой части по всем $\varphi\in E_{x,L,Q}$. □

Лемма 2.15. $\boldsymbol{B}^n(x,L) \geqslant A^n(x;L)$ *для всех точек* $(x,L)\in S$.

Доказательство этой леммы (а значит, и завершение доказательства теоремы 2.13) использует свойство вогнутости функции Беллмана $\boldsymbol{B}^n$ и геометрическую структуру кандидата A^n. Это будет проделано в §3.

2.5. Беллмановские мажоранты. Теперь мы предложим другое семейство функций на области Ω, которое удовлетворяет условиям леммы 2.8 и тем самым ограничивает сверху функцию Беллмана $\boldsymbol{B}^n$. Пусть

$$B_0(x) = \begin{cases} x_1 + \sqrt{x}_2, & x \in \Omega_- \cup \Omega_0, \\ x_1 + \sqrt{x_2 - x_1^2}, & x \in \Omega_+ \end{cases}$$

и

$$A_0(x; L) = L + B_0(T_L x).$$

Заметим, что функции $A_0(\,\cdot\,; L)$ являются вогнутыми во всей выпуклой области $\{x : x_2 \geqslant x_1^2\}$, что влечёт α-вогнутость в Ω. Максимум такой функции в области $\Omega \cap \{x_1 \leqslant L\}$ достигается в точке $(L, L^2 + 1)$. Следовательно,

$$\boldsymbol{B}^n(x, L) \leqslant A_0(x; L) \leqslant A_0(L, L^2 + 1; L) = L + 1. \tag{2.23}$$

Таким образом, семейство $\{A_0(\,\cdot\,; L)\}_L$ даёт точное значение нормы, равное 1, для диадической максимальной функции. Это семейство обладает тем очевидным преимуществом, что оно имеет простое и явное аналитическое выражение. Эта функция совпадает с $\boldsymbol{B}^n$ в области $T_{-L}\Omega_0$. Однако она даёт лишь грубую оценку функции $\boldsymbol{B}^n$ вдали от этой области. В частности, в качестве функции $\Phi_n(t)$ в теореме 1.1 это семейство дало бы выражение

$$\Phi_n(t) = \sqrt{t^2 + 1} - t,$$

что далеко от правильного экспоненциального, зависящего от размерности убывания “настоящей” функции Φ_n.

За счёт увеличения сложности можно получить лучшее мажорирующее семейство $\{A_k(\,\cdot\,; L)\}_L$, если, выбрав любое натуральное число k, отсечь “настоящего” беллмановского кандидата B, определённого формулами (2.15)–(2.18) по области Ω_k, продолжив за пределы Ω_k тем же аналитическим выражением, что функция имеет в Ω_k. Таким образом мы получим новую α-вогнутую функцию B_k, и, полагая

$$A_k(x; L) = L + B_k(T_L x),$$

новое мажорирующее семейство. Ни одна из этих мажорант не даст того убывания, что даёт функция Φ_n, хотя B_k и сходятся поточечно к “настоящему” кандидату B при $k \to \infty$.

§3. Обратное неравенство и оптимайзеры

В настоящем параграфе мы докажем лемму 2.15 и тем самым завершим доказательство теорем 2.13 и 1.1. Как будет ниже показано, достаточно рассмотреть только случай $L = 0$. Таким образом, всё будет происходить в следующей области:

$$\Omega_* := \Omega_- \cup \Omega_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k.$$

Чтобы упростить обозначения, мы в этом параграфе будем писать $Q_0 = (0,1)^n$, $\mathcal{B}(x) = \boldsymbol{B}^n(x,0)$ и $F_x = E_{x,0,Q_0}$, если $x \in \Omega_*$. Мы также будем использовать прежнее обозначение $\tau = \frac{1-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ при $\alpha = 2^{-n}$. Таким образом, в этом параграфе $\tau = 2^{n/2} - 2^{-n/2}$.

Лемма 3.1.

$$\mathcal{B}(x) \geqslant B(x) \ \textit{для всех точек } x \in \Omega_*. \tag{3.1}$$

Из неравенства (3.1) сразу вытекает лемма 2.15. Действительно, применяя лемму 2.5 и формулу (2.22), получаем

$$\boldsymbol{B}^n(x;L) = L + \mathcal{B}(T_L x) \geqslant L + B(T_L x) = A^n(x;L),$$

что и требовалось.

Замечание 3.2. Отметим, что на границе $\Gamma_0 \cap \Omega_*$ и функция $\mathcal{B}$, и функция B равны 0. Для функции $\mathcal{B}$ — это утверждение леммы 2.3. Для функции B это следует из формулы (2.13) в области Ω_0, из формулы (2.15) в области Ω_1, из формулы (2.17) в области Ω_2 и из формулы (2.18) в оставшейся части области Ω_*.

Определение 3.3. Пусть $x \in \Omega_*$. Будем говорить, что последовательность функций $\{\varphi_j\}$ на $\mathbb{R}^n$ является оптимизирующей последовательностью для функции B в точке x, если $\varphi_j \in F_x$, и

$$\langle N\varphi_j \rangle_{Q_0} \to B(x) \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.2}$$

Стандартным способом доказательства утверждений типа (3.1) является предъявление оптимизирующей последовательности для каждой точки $x \in \Omega_*$. Во многих диадических задачах вогнутость функции Беллмана в каком-то смысле ясна непосредственно из определения, что позволяет обойтись построением оптимайзеров только для точек на границе области (см. [17]). В нашей задаче мы сможем пойти ещё дальше: комбинируя свойство вогнутости функции $\boldsymbol{B}^n$ из леммы 2.4 с геометрической структурой, определяющей функцию B, мы сможем доказать лемму 3.1, вообще не используя явный вид оптимайзеров. Однако, поскольку такие оптимайзеры представляют независимый интерес, позже в этом параграфе мы предъявим-таки оптимайзер для ключевой точки $x = (0, 1)$. (Поскольку это будет последовательность, на которой в пределе достигается норма оператора N из BMO в BLO, мы назовём её последовательностью, оптимизирующей норму.)

Сперва мы докажем оценку (3.1) для точек x, лежащих на границе области Ω_*. Замечание 3.2 показывает, что нам нужно рассматривать только точки на правой границе $\{(0, y)\colon 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ и на верхней границе $\Gamma_1 \cap \Omega_*$. Аргументация в этих двух случаях несколько различна, но в обоих случаях существенно используется лемма 2.4 и связанная с ней локальная выпуклость функции $\mathcal{B}$ в области Ω_*. (Мы называем функцию локально вогнутой в некоторой области, если она вогнута на любой выпуклой подобласти.)

Лемма 3.4. *Функция $\mathcal{B}$ локально выпукла в Ω_*.*

Доказательство. Возьмём две произвольные точки $x^-, x^+ \in \Omega_*$, для которых весь соединяющий их отрезок $[x^-, x^+]$ лежит в Ω_*. Пусть $\{\varphi_j^-\}$ и $\{\varphi_j^+\}$ — оптимизирующие последовательности для функции B соответственно в точках x^- и x^+. Возьмём любое число $\gamma \in (0, 1)$ и разобьём куб Q_0 в объединение двух множеств, одно будет иметь меру $1 - \gamma$, а другое — γ. Каждое из двух множеств с точностью до множества меры ноль представим как объединение дизъюнктных диадических кубов. Таким образом,

$$Q_0 \approx \Bigl(\bigcup_k Q_k^-\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_k Q_k^+\Bigr),$$

где $\sum_k |Q_k^-| = 1 - \gamma$, $\sum_k |Q_k^+| = \gamma$, а символ “$\approx$” означает равенство с точностью до множества меры ноль.

Определим новую последовательность функций $\{\varphi_j\}$ на $\mathbb{R}^n$, полагая эти функции нулём вне куба Q_0, и $\varphi_j|_{Q_0}$ определим как отскалированную копию функции φ_j^- на каждом кубе Q_k^- и как отскалированную копию функции φ_j^+ на каждом кубе Q_k^+. Понятно, что $\varphi_j \in F_{(1-\gamma)x^- + \gamma x^+}$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{B}((1-\gamma)x^- + \gamma x^+) \geqslant \langle N\varphi_j\rangle_{Q_0} &= \sum_k |Q_k^-|\langle N\varphi_j\rangle_{Q_k^-} + \sum_k |Q_k^+|\langle N\varphi_j\rangle_{Q_k^+} \\ &= (1-\gamma)\langle N\varphi_j^-\rangle_{Q_0} + \gamma\langle N\varphi_j^+\rangle_{Q_0}.\end{aligned}$$

Правая часть неравенства сходится к $(1-\gamma)\mathcal{B}(x^-)+\gamma\mathcal{B}(x^+)$ при $j\to\infty$. В результате получаем утверждение леммы. □

Лемма 3.5. $\mathcal{B}(0,y)\geqslant B(0,y)$ *для всех* y, $0\leqslant y\leqslant 1$.

Доказательство. Утверждение достаточно проверять для положительных значений y, поскольку при $y=0$ как $\mathcal{B}(0,y)$, так и $B(0,y)$ обращаются в ноль. Выберем маленький параметр $\delta>0$ и положим $x^-=(2^{-n}\delta,y)$ и $x^+=(-(1-2^{-n})\delta,y)$. Применяя лемму 2.4 с $L=L^+=0$ и $L^-=2^{-n}\delta$, мы получим неравенство

$$\mathcal{B}(0,y)\geqslant(1-2^{-n})\boldsymbol{B}^n(2^{-n}\delta,y,2^{-n}\delta)+2^{-n}\mathcal{B}(-(1-2^{-n})\delta,y). \tag{3.3}$$

По лемме 2.5

$$\boldsymbol{B}^n(2^{-n}\delta,y,2^{-n}\delta)=2^{-n}\delta+\boldsymbol{B}^n(0,y-2^{-2n}\delta^2,0)=2^{-n}\delta+\mathcal{B}(0,y-2^{-2n}\delta^2),$$

а лемма 3.4 даёт нам неравенство

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(-(1-2^{-n})\delta,y)&\geqslant\frac{\sqrt{y}-(1-2^{-n})\delta}{\sqrt{y}}\mathcal{B}(0,y)+\frac{(1-2^{-n})\delta}{\sqrt{y}}\mathcal{B}(-\sqrt{y},y)\\&=\frac{\sqrt{y}-(1-2^{-n})\delta}{\sqrt{y}}\mathcal{B}(0,y),\end{aligned}$$

поскольку функция $\mathcal{B}$ равна нулю на нижней границе области Ω_*.

Если мы подставим эти два соотношения в (3.3) и результат разделим на $1-2^{-n}$, то получим

$$\mathcal{B}(0,y)-\mathcal{B}(0,y-2^{-2n}\delta^2)\geqslant-\frac{2^{-n}\delta}{\sqrt{y}}\mathcal{B}(0,y)+2^{-n}\delta. \tag{3.4}$$

Напомним, что функция $y\mapsto\mathcal{B}(0,y)$ вогнута на отрезке $[0,1]$, и, в частности, существуют конечные односторонние производные на интервале $(0,1)$. Предполагая, что $y<1$, мы поделим обе части неравенства (3.4) на δ и устремим δ к нулю. Левая часть обратится в ноль, а в результате останется неравенство

$$\mathcal{B}(0,y)\geqslant\sqrt{y}=B(0,y),$$

которое и нужно было доказать. Наконец, если $y=1$, мы в неравенстве (3.4) используем только что полученную оценку

$$\mathcal{B}(0,1-2^{-2n}\delta^2)\geqslant\sqrt{1-2^{-2n}\delta^2}$$

и устремим δ к нулю. В результате получим $\mathcal{B}(0,1)\geqslant 1$, что и завершает доказательство леммы. □

Лемма 3.6. $\mathcal{B}(v,v^2+1)\geqslant B(v,v^2+1)$ *при всех* v, $v\leqslant 0$.

Доказательство. Сперва мы проверим это утверждение для точек $P = (v, v^2+1)$, лежащих в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Если $P \in \Omega_1$, то, согласно формуле (2.14), $v = \frac{1}{2}(3s - \frac{1}{s}) - 1$ для некоторого значения s, $s \in [2^{-n/2}, 1]$. Пусть $u = v - s$, $v^+ = v - s + \frac{1}{s}$, и мы введём две вспомогательные точки

$$Q = (v^+, (v^+)^2 + 1) \quad \text{и} \quad R = (u, u^2).$$

Нетрудно проверить, что точка P лежит на отрезке $[Q, R]$ (на самом деле $P = s^2 Q + (1 - s^2)R$), и отрезок $[P, R]$ целиком лежит в области Ω. Поскольку $s^2 \geqslant 2^{-n}$, на отрезке $[P, R]$ найдётся точка R_1, для которой $P = (1 - 2^{-n})R_1 + 2^{-n}Q$. Заметим, что $v^+ = \frac{1}{2}(s + \frac{1}{s}) - 1 \geqslant 0$. Следовательно, лемма 2.4 с $L = L^- = 0$ и $L^+ = v^+$ гарантирует выполнение неравенства

$$\mathcal{B}(P) \geqslant (1 - 2^{-n})\mathcal{B}(R_1) + 2^{-n}\boldsymbol{B}^n(Q, v^+).$$

Используя лемму 2.5 получаем

$$\mathcal{B}(P) \geqslant (1 - 2^{-n})\mathcal{B}(R_1) + 2^{-n}(v^+ + \mathcal{B}(0,1)). \tag{3.5}$$

Но функция $\mathcal{B}$ локально вогнута в области Ω_*, поэтому

$$\mathcal{B}(R_1) \geqslant \frac{|R_1 - R|}{|P - R|}\,\mathcal{B}(P) + \frac{|P - R_1|}{|P - R|}\,\mathcal{B}(R) = \frac{|R_1 - R|}{|P - R|}\,\mathcal{B}(P).$$

Подставляя эту оценку в неравенство (3.5) и используя факт, установленный в предыдущей лемме, а именно, что $\mathcal{B}(0,1) \geqslant 1$, мы получаем неравенство, равносильное следующему:

$$\mathcal{B}(P) \geqslant s^2(1 + v^+) = \frac{1}{2}\,s(1 + s^2) = B(P),$$

где последнее равенство — это просто формула (2.15) с $x_1 = v$.

В случае $P \in \Omega_2$ рассуждения аналогичны и даже несколько проще. Мы сразу можем взять точку $R = R_1$ на Γ_0, $R = \bigl(v - 2^{-n/2}, (v - 2^{-n/2})^2\bigr)$, тогда точка $Q = \bigl(v + \tau, (v + \tau)^2 + 1\bigr)$ будет точкой пересечения границы Γ_1 с прямой, проходящей через точки P и R. Более того, точка P делит отрезок $[Q, R]$ в нужном соотношении: $P = (1 - 2^{-n})R + 2^{-n}Q$. Поэтому мы можем применить лемму 2.4 с $L = L^- = 0$ и $L^+ = v + \tau$, поскольку $v + \tau \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(P) &\geqslant (1 - 2^{-n})\mathcal{B}\bigl(v - 2^{-n/2}, (v - 2^{-n/2})^2\bigr) + 2^{-n}\boldsymbol{B}^n\bigl(v + \tau, (v + \tau)^2 + 1, v + \tau\bigr)\\ &= 2^{-n}\boldsymbol{B}^n\bigl(v + \tau, (v + \tau)^2 + 1, v + \tau\bigr).\end{aligned}$$

Теперь, пользуясь леммой 2.5 и леммой 3.5 с $y = 0$, получаем оценку

$$\mathcal{B}(P) \geqslant 2^{-n}\,(v + \tau + \mathcal{B}(0,1)) \geqslant 2^{-n}\,(v + \tau + 1) = B(P),$$

где мы снова использовали тот факт, что $\mathcal{B}(0,1) \geqslant 1$, а последнее равенство — это просто формула (2.17) с $x_1 = v$ и $\alpha = 2^{-n}$.

Наконец, пусть $P \in \Omega_{2k+1} \cup \Omega_{2k+2}$ при некотором $k \geqslant 1$. Тогда $T_{-j\tau}P \in \Omega_*$ для всех $j \leqslant k$, и $T_{-k\tau}P \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. С учётом тождества

$$T_{-j\tau}P = (1-2^{-n})(v - j\tau - 2^{-n/2}, (v - j\tau - 2^{-n/2})^2) + 2^{-n}T_{-(j+1)\tau}P$$

последовательное применение леммы 2.4 с $L^{\pm} = L = 0$ вместе с леммой 2.3 даёт цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(P) &\geqslant (1-2^{-n})\mathcal{B}(v-2^{-n/2}, (v-2^{-n/2})^2) + 2^{-n}\mathcal{B}(T_{-\tau}P)\\ &= 2^{-n}\mathcal{B}(T_{-\tau}P) \geqslant \ldots \geqslant 2^{-kn}\mathcal{B}(T_{-k\tau}P) \geqslant 2^{-kn}B(T_{-k\tau}P) = B(P),\end{aligned}$$

где последнее равенство — это формула (2.18). Мы разобрали все случаи, и, тем самым, доказательство завершено. □

Теперь мы готовы доказывать лемму 3.1.

Доказательство леммы 3.1. Каждая внутренняя точка $x \in \Omega_*$ лежит на некотором прямолинейном отрезке m_x, соединяющем граничные точки $U_x \in \{(u, u^2)\colon u \leqslant 0\}$ и $V_x \in \{(v, v^2+1)\colon v \leqslant 0\} \cup \{(0, y)\colon 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ и целиком лежащем в Ω_*, причём функция B линейна на отрезке m_x. Действительно, в Ω_0 такой отрезок m_x расположен горизонтально:

$$\{(t, x_2)\colon -\sqrt{x_2} \leqslant t \leqslant 0\},$$

в областях Ω_1 и Ω_2 отрезок $m_x = \ell_{s(x)}$ задаётся условиями (2.14) и, соответственно, (2.16), а в остальной части области Ω_* отрезок m_x — это образ соответствующего отрезка из $\Omega_1 \cup \Omega_2$, перенесённого преобразованием (2.18), то есть $m_x = T_{k\tau}\ell_{s(\widetilde{x})}$ для подходящего k, где $\widetilde{x} = T_{-k\tau}x$.

Пусть $x \in \Omega_*$. Если x лежит на границе области Ω_*, то утверждение леммы содержится либо в замечании 3.2, либо в лемме 3.5, либо в лемме 3.6. Если x — внутренняя точка области Ω_*, то мы можем записать её в виде $x = (1-\gamma)U_x + \gamma V_x$, где U_x и V_x — концы соответствующего отрезка m_x. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(x) &\geqslant (1-\gamma)\mathcal{B}(U_x) + \gamma\mathcal{B}(V_x) = \gamma\mathcal{B}(V_x)\\ &\geqslant \gamma B(V_x) = (1-\gamma)B(U_x) + \gamma B(V_x) = B(x).\end{aligned}$$ □

3.1. Последовательность, оптимизирующая норму. Мы приведём оптимизирующую последовательность для кандидата B в точке $(0,1)$. Как было отмечено в начале настоящего параграфа, построение такой последовательности не является необходимым для доказательства леммы 3.1. Однако структура этой последовательности кажется нам интересной, поскольку отражает двойственную природу решаемой экстремальной задачи. Поясним чуть подробнее. Беллмановская постановка задачи (2.1)–(2.2) является такой же, как и оригинальная L^2-постановка для диадической максимальной функции из работы [10], за исключением того, что теперь BMO-норма тестовых функции ограничена единицей. Соответственно оптимайзер, приводимый ниже, можно рассматривать и как специальную перестановку диадического логарифма из статьи [17], проведённую с целью максимизации BMO-нормы этого логарифма, и как близкого родственника оптимайзера для классического диадического максимального оператора, построенного в работах [16] и [18].

Для построения нужной оптимизирующей последовательности мы сперва при фиксированном натуральном j определим на отрезке $I_0 = (0,1)$ вспомогательную функцию ψ с помощью следующего рекурсивного соотношения:

$$\psi(t) = \begin{cases} -\gamma, & 0 < t \leqslant 2^{-j}, \\ \psi(2^k t - 1), & 2^{-k} < t \leqslant 2^{-k+1}, \quad 1 < k \leqslant j, \\ \psi(2t-1) + \delta, & \frac{1}{2} < t < 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Проверим, что эта формула корректно определяет почти всюду функцию ψ по любым двум числовым параметрам γ и δ единственным образом. Для этого по индукции зададим вспомогательную последовательность функций $\{\psi^{(m)}\}$, определённую на некотором подмножестве промежутка I_0:

$$\psi^{(1)}(t) = \begin{cases} -\gamma, & 0 < t \leqslant 2^{-j}, \\ \text{не определена}, & 2^{-j} < t < 1; \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\psi^{(m)}(t) = \begin{cases} -\gamma, & 0 < t \leqslant 2^{-j}, \\ \psi^{(m-1)}(2^k t - 1), & 2^{-k} < t \leqslant 2^{-k+1}, \quad 1 < k \leqslant j, \\ \psi^{(m-1)}(2t-1) + \delta, & \frac{1}{2} < t < 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Заметим, что то множество, где функция $\psi^{(m)}$ не определена, имеет меру $(1 - 2^{-j})^m$, а в тех точках, где функция определена, она на следующем шаге уже не меняет значения. Таким образом, эта вспомогательная последовательность сходится к почти всюду определённой функции ψ, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (3.6).

То же самое рассуждение доказывает и единственность функции, задаваемой соотношением (3.6). Действительно, разность двух решений будет удовлетворять тому же соотношению с $\gamma = \delta = 0$. Рассуждая так же, как когда мы определяли последовательность $\psi^{(m)}$, мы можем гарантировать, что “на первом шаге” эта разность равна нулю на множестве меры не меньшей, чем 2^{-j}, а после m-кратного использования соотношения (3.6), мы видим, что эта разность равна нулю на множестве меры не меньшей, чем $1 - (1 - 2^{-j})^m$, а следовательно, она равна нулю почти всюду.

Теперь для каждого натурального числа j выберем свои числовые параметры γ_j и δ_j так, чтобы решение рекуррентного соотношения (3.6) имело бы среднее значение 0 на I_0, а среднее значение квадрата было бы 1. Нетрудно сосчитать, что для этого мы должны взять

$$\gamma_j = \frac{1}{\sqrt{1+2^{1-j}}}, \qquad \delta_j = \frac{2^{1-j}}{\sqrt{1+2^{1-j}}}. \tag{3.9}$$

Пусть ψ_j — это функции, задаваемые соотношением (3.6) с константами $\gamma = \gamma_j$ и $\delta = \delta_j$ и продолженные нулём вне I_0. Одномерная максимальная функция $N_1\psi_j$ будет определяться только "внутренним" поведением функции ψ_j на промежутке I_0, а поэтому она будет удовлетворять тому же рекурсивному соотношению (3.6) с $\gamma = 0$ и $\delta = \delta_j$. Поскольку однозначность решения рекуррентного соотношения (3.6) уже была доказана, мы можем утверждать, что

$$N_1\psi_j(t) = \psi_j(t) + \gamma_j, \tag{3.10}$$

Следующая лемма собирает частично уже отмеченные свойства последовательности $\{\psi_j\}$. Чисто вычислительное доказательство этой леммы мы оставим читателю в качестве упражнения.

Лемма 3.7. *Последовательность $\{\psi_j\}$ обладает такими свойствами*:

$$\begin{aligned}
&\forall j, \quad \psi_j \in \mathrm{BMO}^d(I_0), \quad \|\psi_j\|_{\mathrm{BMO}^d(I_0)} = 1;\\
&\forall j, \quad \langle \psi_j \rangle_{I_0} = 0, \quad \langle \psi_j^2 \rangle_{I_0} = 1;\\
&\forall j, \quad \inf_{I_0} N_1\psi_j = 0;\\
&\qquad \langle N_1\psi_j \rangle_{I_0} \longrightarrow 1, \ \textit{при}\ j \to \infty.
\end{aligned}$$

Чтобы одномерный пример $\{\psi_j\}$ распространить на более высокие размерности, определим функцию

$$\varphi_j(t_1, t_2, ..., t_n) = \psi_j(t_1). \tag{3.11}$$

Непосредственно видно, что последовательность $\{\varphi_j\}$ будет оптимизирующей для беллмановсного кандидата B в точке $(0,1)$ в смысле определения 3.3. Действительно, и включение $\varphi_j \in F_{(0,1)}$, и условие (3.2) непосредственно обеспечиваются леммой 3.7.

Завершая, мы выполним обещание, данное во введении, и представим последовательность, оптимизирующую норму классического диадического оператора M. Заметим, что последовательность $\{\varphi_j + \gamma_j\}$ неотрицательна на $\mathbb{R}^n$, поэтому операторы N и M на ней совпадают. Более того,

$$\|\varphi_j + \gamma_j\|_{\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_j\|_{\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}^n)} = 1$$

и
$$\inf_{Q_0} M(\varphi_j+\gamma_j)=\inf_{Q_0} N(\varphi_j+\gamma_j)=\gamma_j.$$
Следовательно,
$$\langle M(\varphi_j+\gamma_j)\rangle_{Q_0}-\inf_{Q_0} M(\varphi_j+\gamma_j)=\langle N(\varphi_j+\gamma_j)\rangle_{Q_0}-\gamma_j=\langle N\varphi_j\rangle_{Q_0}\to 1,$$
а это означает, что $\|M\|_{\mathrm{BMO}\to\mathrm{BLO}}\geqslant 1$.

§4. α-вогнутость функции B

В этом параграфе будет доказана лемма 2.11, то есть мы проверим, что функция B, заданная формулами (2.11)–(2.18) является α-вогнутой в области Ω. Для этого мы используем лемму из статьи [17], которая даёт достаточное условие α-вогнутости. Если говорить более предметно, лемма 2.5 из этой работы содержит следующее утверждение (с точностью до небольших изменений в обозначениях).

Лемма 4.1. *Пусть $\alpha\in(0,\frac12]$. Предположим, что функция B, заданная в области Ω, удовлетворяет трём следующим условиям:*

(1) *Функция B локально вогнута в Ω.*

(2) *Функция B имеет некасательную производную в каждой точке границы Γ_1. Более того, для любых двух различных точек на Γ_1, $P=(p,p^2+1)$ и $Q=(q,q^2+1)$, для которых $|p-q|\leqslant\tau$, справедливо неравенство*
$$(D_{\overrightarrow{PQ}}B)(P)\geqslant(D_{\overrightarrow{PQ}}B)(Q),$$
где $D_{\overrightarrow{PQ}}$ — производная в направлении вектора $\overrightarrow{PQ}$.

(3) *Для любых описанных выше точек P и Q, а также для точки $R=\frac{1}{1-\alpha}(P-\alpha Q)$ выполняется неравенство*
$$B(P)\geqslant(1-\alpha)\,B(R)+\alpha\,B(Q).$$

Тогда функция B является α-вогнутой в области Ω.

Замечание 4.2. Отметим, что, если $k\geqslant 3$ и $x\in\Omega_k$, то справедливо тождество
$$B(x)=\alpha^k\,B(T_{k\tau}x).$$
Этот факт сводит проверку условий (2) и (3) в лемме 4.1 для функции B к первым нескольким областям Ω_k и к небольшому количеству специальных случаев. Например, если $P,Q\in\Omega_-$ и m^* — это наибольшее натуральное число m, для которого точки $T_{-m\tau}P$ и $T_{-m\tau}Q$ остаются в Ω_-, то, полагая $P^*:=T_{-m^*\tau}P$, $Q^*:=T_{-m^*\tau}Q$, мы имеем равносильность двух оценок:
$$(D_{\overrightarrow{PQ}}B)(P)\geqslant(D_{\overrightarrow{PQ}}B)(Q)\quad\Longleftrightarrow\quad(D_{\overrightarrow{P^*Q^*}}B)(P^*)\geqslant(D_{\overrightarrow{P^*Q^*}}B)(Q^*).$$

Возможность аналогичного сдвига в условии (3) совсем очевидна.

Замечание 4.3. Отметим, что для точек P и Q, описанных в условии (2), точка $R=(r_1,r_2)$, заданная в условии (3), всегда лежит в области Ω. Действительно, несложные алгебраические выкладки показывают, что неравенство $r_2\geqslant r_1^2$ равносильно тому, что $|p-q|\leqslant\tau$.

Проверку трёх условий леммы 4.1 мы представим в виде трёх отдельных лемм.

4.1. Проверка условия (1) леммы 4.1.

Лемма 4.4. *Функция B локально вогнута в Ω.*

Доказательство. Легко видеть, что функция B непрерывна на Ω. Элементарное дифференцирование показывает, что B локально вогнута в Ω_0 и в Ω_+, а кроме того она непрерывно дифференцируема внутри области $\Omega_0\cup\Omega_+$. Следовательно, она локально вогнута в $\Omega_0\cup\Omega_+$. Покажем, что эти свойства распространяются и на Ω_-.

Заметим, что формулы (2.14)–(2.19) мы можем переписать однообразно следующим образом. Если $m\geqslant 1$ и $x\in\Omega_m$, то мы положим

$$k=\Big[\frac{m}{2}\Big],\qquad z=\frac{s}{\alpha^k},\qquad \mu=k\tau+1.$$

В этих обозначениях $u=\frac12\big(z-\frac1z\big)-\mu$ и $v=u+z$, если m нечётное, и $v=u+\frac1z$ если m чётное. Тогда наклон экстремального отрезка ℓ_s равен

$$\frac{v^2+1-u^2}{v-u}=2u+v-u+\frac{1}{v-u}=2u+z+\frac1z=2(z-\mu).$$

Таким образом, z как функция от $x=(x_1,x_2)$ задаётся уравнением $x_2=2(z-\mu)(x_1-u)+u^2$ или (после подстановки выражения для u)

$$x_2=2(z-\mu)x_1-\frac34\,z^2+2\mu z+\frac12-\mu^2+\frac{1}{4z^2}. \tag{4.1}$$

(Условием $s\in[\alpha^{m/2},\alpha^{(m-1)/2}]$ выделяется единственное решение z этого уравнения.) Формула для функции B принимает вид

$$B(x)=\frac{\alpha^k}{2}\,(1+z^2)(x_1-u). \tag{4.2}$$

Дифференцируя формулу (4.1), мы можем сосчитать производные z_{x_1} и z_{x_2}:

$$z_{x_1}=\frac{2(\mu-z)}{2x_1-\frac32\,z+2\mu-\frac{1}{2z^3}},\qquad z_{x_2}=\frac{1}{2x_1-\frac32\,z+2\mu-\frac{1}{2z^3}}.$$

Отметим, что всегда справедливо неравенство $x_1 \leqslant v$. Если m нечётное, то $z \leqslant 1 \leqslant \mu$ и $v = \frac{1}{2}\left(3z - \frac{1}{z}\right) - \mu$, следовательно, $\mu - z \geqslant 0$ и

$$2x_1 - \frac{3}{2}\,z + 2\mu - \frac{1}{2z^3} \leqslant \frac{3}{2}\,z - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} = \frac{1}{2z^3}\,(3z^2+1)(z^2-1) \leqslant 0.$$

Если m чётное, то $z \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ и $v = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - \mu$, таким образом $\mu - z \geqslant \tau + 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 1 - \sqrt{\alpha} \geqslant 0$ и

$$2x_1 - \frac{3}{2}\,z + 2\mu - \frac{1}{2z^3} \leqslant -\frac{1}{2}\,z + \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} = -\frac{1}{2z^3}\,(z^2-1)^2 \leqslant 0.$$

Итак, в любом случае справедливы неравенства $z_{x_1} \leqslant 0$ и $z_{x_2} \leqslant 0$. Более того, из формулы (4.2) следует, что

$$\begin{aligned}\alpha^{-k}B_{x_1} &= \frac{1}{2}\,(1+z^2) + \Big(z(x_1-u) - \frac{1}{2}\,(1+z^2)u_z\Big)z_{x_1}\\ &= \frac{1}{2}\,(1+z^2) + \frac{z}{2}\,\Big(2x_1 - \frac{3}{2}\,z + 2\mu - \frac{1}{2z^3}\Big)z_{x_1}\\ &= \frac{1}{2}\,(1+z^2) + z(\mu - z) = \frac{1}{2}\,(1-z^2) + z\mu,\end{aligned}$$

что можно равносильно переписать в виде

$$\alpha^{-k}B_{x_1} = -uz. \tag{4.3}$$

Аналогично получаем равенство

$$\alpha^{-k}B_{x_2} = \Big(z(x_1-u) - \frac{1}{2}\,(1+z^2)u_z\Big)z_{x_2} = \frac{z}{2}. \tag{4.4}$$

Следовательно,

$$\alpha^{-k}B_{x_1x_1} = (\mu - z)z_{x_1}, \quad \alpha^{-k}B_{x_1x_2} = (\mu - z)z_{x_2}, \quad \alpha^{-k}B_{x_2x_2} = \frac{1}{2}\,z_{x_2},$$

откуда

$$B_{x_1x_1} \leqslant 0, \quad B_{x_2x_2} \leqslant 0, \quad B_{x_1x_1}B_{x_2x_2} = B^2_{x_1x_2}. \tag{4.5}$$

Это означает, что функция B является локально вогнутой в каждой области Ω_m. Более того, поскольку $B_{x_1} = -us$ и $B_{x_2} = \frac{s}{2}$, а s — непрерывная функция от x в области Ω_-, мы делаем вывод, что $B \in C^1(\Omega_-)$. А следовательно, функция B является локально вогнутой во всей области Ω_-.

Осталось рассмотреть границу между областями Ω_0 и Ω_-, то есть экстремальную линию ℓ_1. Как было только что показано, в области Ω_- у нас $B_{x_1} = -us$ и $B_{x_2} = \frac{s}{2}$. То есть на ℓ_1 производные принимают значения $B_{x_1} = 1$ и $B_{x_2} = \frac{1}{2}$. С другой стороны, в области Ω_0 у нас $B_{x_1} = 1$ и $B_{x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$. А экстремаль ℓ_1 это отрезок прямой $x_2 = 1$, то есть на ней $B_{x_2} = \frac{1}{2}$. Итак, градиент ∇B непрерывен в окрестности экстремали ℓ_1, и, следовательно, функция B локально вогнута во всей области Ω. $\square$

4.2. Важные формулы. Тут мы соберём в одном месте несколько ключевых формул, которыми мы будем пользоваться в оставшейся части этого параграфа. Во-первых, мы уже знаем, что в области Ω_- справедливы формулы

$$B_{x_1} = -us, \quad B_{x_2} = \frac{s}{2}. \tag{4.6}$$

Это — формулы (4.3) и (4.4). Функции $u = u(s)$ и $s = s(x)$ определены формулами (2.14), (2.16) и (2.19).

Нам потребуются выражения в терминах s для функции B и её касательной производной в точках верхней границы области Ω_-. Напомним, что если $v \leqslant 0$, то для точки $V = (v, v^2+1)$ мы пишем $b(v) := B(V)$. Из формул (2.15), (2.17) и (2.18) мы получаем выражение

$$b(v) = \begin{cases} \frac{s}{2}\left(1 + \left(\frac{s}{\alpha^k}\right)^2\right), & \text{если } V \in \Omega_{2k+1}, \quad k \geqslant 0, \\ \frac{s}{2}\left(1 + \left(\frac{\alpha^k}{s}\right)^2\right), & \text{если } V \in \Omega_{2k}, \quad k \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Далее, из формулы (4.6) мы заключаем, что

$$b'(v) = B_{x_1}(V) + 2vB_{x_2}(V) = s(v-u). \tag{4.8}$$

А использование формул (2.14), (2.16) и (2.19) даёт нам выражение

$$b'(v) = \begin{cases} \frac{s^2}{\alpha^k}, & \text{если } V \in \Omega_{2k+1}, \quad k \geqslant 0, \\ \alpha^k, & \text{если } V \in \Omega_{2k}, \quad k \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.9}$$

4.3. Проверка условия (2) леммы 4.1.

Лемма 4.5. *Пусть $P = (p, p^2+1)$ и $Q = (q, q^2+1)$ — две точки на границе Γ_1, для которых выполнено условие $|p-q| \leqslant \tau$. Тогда*

$$(D_{\overrightarrow{PQ}}B)(P) \geqslant (D_{\overrightarrow{PQ}}B)(Q). \tag{4.10}$$

Доказательство. Поскольку условие (4.10) симметрично относительно перемены местами точек P и Q, достаточно будет его проверить только при $p \leqslant q$. Более того, так как функция $x_1 + \sqrt{x_2 - x_1^2}$ является вогнутой во всей области $\{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant x_1^2\}$, то условие (4.10) автоматически выполнено, если $0 \leqslant p \leqslant q$. Поэтому мы будем предполагать, что $p \leqslant 0$.

Поскольку $\overrightarrow{PQ} = (q-p)\left[\begin{smallmatrix}1\\ p+q\end{smallmatrix}\right]$, мы можем неравенство (4.10) переписать в виде

$$B_{x_1}(P) + B_{x_2}(P)(p+q) \geqslant B_{x_1}(Q) + B_{x_2}(Q)(p+q),$$

а после использования формулы (4.8) оно примет вид

$$b'(p) - b'(q) + (q-p)(B_{x_2}(P) + B_{x_2}(Q)) \geqslant 0. \tag{4.11}$$

Если $q \geqslant 0$, то $b'(q) = 1$ и $B_{x_2}(Q) = \frac{1}{2}$, откуда следует, что левая часть формулы (4.11) является возрастающей функцией от q, поскольку $B_{x_2} \geqslant 0$. Следовательно, случай $q \geqslant 0$ сводится к случаю $q = 0$.

Итак, теперь мы предполагаем, что $q \leqslant 0$. Тогда

$$B_{x_2}(P) = \frac{s_p}{2} \quad \text{и} \quad B_{x_2}(Q) = \frac{s_q}{2},$$

а левую часть неравенства (4.11) можно рассматривать как функцию переменных s_p и s_q:

$$G(s_p, s_q) := b'(p) - b'(q) + \frac{1}{2}\,(q - p)(s_p + s_q),$$

и неравенство (4.11) — это условие $G \geqslant 0$.

У нас имеются следующие возможности поместить точки P и Q на границу Γ_1:

- $k \geqslant 1$, $P \in \Omega_{2k}$, $Q \in \Omega_{2k} \cup \Omega_{2k-1}$;
- $k \geqslant 2$, $P \in \Omega_{2k}$, $Q \in \Omega_{2k-2}$;
- $k \geqslant 1$, $P \in \Omega_{2k+1}$, $Q \in \Omega_{2k+1} \cup \Omega_{2k} \cup \Omega_{2k-1}$.

Если учесть замечание 4.2, то нам достаточно рассмотреть три следующих случая:

- $P \in \Omega_2$, $Q \in \Omega_2 \cup \Omega_1$;
- $P \in \Omega_4$, $Q \in \Omega_2$;
- $P \in \Omega_3$, $Q \in \Omega_3 \cup \Omega_2 \cup \Omega_1$.

Случай 1: $P \in \Omega_2$, $Q \in \Omega_2 \cup \Omega_1$. Так как $P \in \Omega_2$, то $b'(p) = \alpha$. Если $Q \in \Omega_2$, то так же и $b'(q) = \alpha$, поэтому $G \geqslant 0$. Если $Q \in \Omega_1$, то $b'(q) = s_q^2$, и

$$G(s_p, s_q) = \alpha - s_q^2 + \frac{q - p}{2}\,(s_p + s_q),$$

где $\alpha \leqslant s_p \leqslant \sqrt{\alpha}$, $p = \frac{1}{2}(\frac{s_p}{\alpha} + \frac{\alpha}{s_p}) - \tau - 1$, $\sqrt{\alpha} \leqslant s_q \leqslant 1$ и $q = \frac{1}{2}(3s_q - \frac{1}{s_q}) - 1$. Непосредственное дифференцирование показывает, что это — вогнутая функция по переменной s_q, то есть достаточно проверить, что $G(s_p, \sqrt{\alpha}) \geqslant 0$ и $G(s_p, 1) \geqslant 0$. Первое неравенство очевидно, а второе равносильно следующему:

$$g(s_p) := \alpha - 1 - \frac{p}{2}\,(s_p + 1) \geqslant 0.$$

Легко видеть что функция g является вогнутой функцией от переменной s_p, таким образом, нам нужно только проверить, что $g(\alpha) \geqslant 0$ и $g(\sqrt{\alpha}) \geqslant 0$. Если $s_p = \alpha$, то $p = -\tau$, и $g(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(1-\alpha)(1-\sqrt{\alpha})^2 \geqslant 0$. Если $s_p = \sqrt{\alpha}$, то $p = \frac{1}{2}(3\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}) - 1$, и $g(\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(1 + \sqrt{\alpha})(1 - \sqrt{\alpha})^2 \geqslant 0$.

Случай 2: $P \in \Omega_4$**,** $Q \in \Omega_2$**.** Теперь $\alpha^2 \leqslant s_p \leqslant \alpha^{3/2}$, $p = \frac{1}{2}(\frac{s_p}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{s_p}) - 2\tau - 1$, $b'(p) = \alpha^2$ и $\alpha \leqslant s_q \leqslant \frac{s_p}{\alpha}$, $q = \frac{1}{2}(\frac{s_q}{\alpha} + \frac{\alpha}{s_q}) - \tau - 1$, $b'(q) = \alpha$. Таким образом,

$$G(s_p, s_q) = \alpha^2 - \alpha + \frac{q-p}{2}\,(s_p + s_q).$$

Эта функция является возрастающей функцией от s_q, поскольку при росте s_q параметр q тоже растёт. Следовательно, достаточно проверить, что $G(s_p, \alpha) \geqslant 0$. Заметим, что если $s_q = \alpha$, то $Q \in \Omega_3$. Поскольку мы уже проверили, что $G \geqslant 0$ в алгебраически эквивалентном случае $P \in \Omega_2$, а $Q \in \Omega_1$, мы делаем вывод, что $G(s_p, \alpha) \geqslant 0$.

Случай 3: $P \in \Omega_3$**,** $Q \in \Omega_3 \cup \Omega_2 \cup \Omega_1$**.**

В этом случае $\alpha^{3/2} \leqslant s_p \leqslant \alpha$, $p = \frac{1}{2}(\frac{3s_p}{\alpha} - \frac{\alpha}{s_p}) - \tau - 1$, и $b'(p) = \frac{s_p^2}{\alpha}$.

Если $Q \in \Omega_3$, то $s_p \leqslant s_q \leqslant \alpha$, $q = \frac{1}{2}(\frac{3s_q}{\alpha} - \frac{\alpha}{s_q}) - \tau - 1$ и $b'(q) = \frac{s_q^2}{\alpha}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} G(s_p, s_q) &= \frac{1}{\alpha}(s_p^2 - s_q^2) + \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{\alpha}(s_q - s_p) - \alpha\Big(\frac{1}{s_q} - \frac{1}{s_p}\Big)\Big)(s_p + s_q) \\ &= \frac{1}{4\alpha s_p s_q}\,(s_q^2 - s_p^2)(\alpha^2 - s_p s_q) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Если $Q \in \Omega_2$, то $\alpha \leqslant s_q \leqslant \sqrt{\alpha}$, $q = \frac{1}{2}(\frac{s_q}{\alpha} + \frac{\alpha}{s_q}) - \tau - 1$ и $b'(q) = \alpha$. Таким образом,

$$\begin{aligned} G(s_p, s_q) &= \frac{s_p^2}{\alpha} - \alpha + \frac{1}{4}\Big(\frac{s_q}{\alpha} - \frac{3s_p}{\alpha} + \frac{\alpha}{s_q} + \frac{\alpha}{s_p}\Big)(s_p + s_q) \\ &= \frac{1}{4\alpha}\,(s_q - s_p)^2 + \frac{\alpha}{4}\Big(\frac{s_q}{s_p} + \frac{s_p}{s_q} - 2\Big) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Если $Q \in \Omega_1$, то $\sqrt{\alpha} \leqslant s_q \leqslant \frac{s_p}{\alpha}$, $q = \frac{1}{2}(3s_q - \frac{1}{s_q}) - 1$ и $b'(q) = s_q^2$. Таким образом,

$$G(s_p, s_q) = \frac{s_p^2}{\alpha} - s_q^2 + \frac{q-p}{2}\,(s_p + s_q).$$

Эта функция является вогнутой по переменной s_q, так что достаточно проверить, что $G(s_p, \sqrt{\alpha}) \geqslant 0$ и $G(s_p, \frac{s_p}{\alpha}) \geqslant 0$. Если $s_q = \sqrt{\alpha}$, то $Q \in \Omega_2$, и этот случай уже рассмотрен выше. Если $s_q = \frac{s_p}{\alpha}$, то $q = p + \tau$, поэтому

$$G\Big(s_p, \frac{s_p}{\alpha}\Big) = \frac{s_p^2}{\alpha} - \frac{s_p^2}{\alpha^2} + \frac{\tau}{2}\Big(1 + \frac{1}{\alpha}\Big)s_p.$$

Эта функция вогнута по переменной s_p, так что достаточно проверить, что $G(\alpha^{3/2}, \sqrt{\alpha}) \geqslant 0$ и $G(\alpha, 1) \geqslant 0$. Непосредственный счёт показывает, что

$$G(\alpha^{3/2}, \sqrt{\alpha}) = \frac{1}{2}\,(1-\alpha)^2, \qquad G(\alpha, 1) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(1-\alpha)(1-\sqrt{\alpha})^2 \geqslant 0. \quad \square$$

4.4. Проверка условия (3) леммы 4.1. Для всех p и q, для которых $|q-p| \leqslant \tau$, положим

$$H(p,q) = b(p) - (1-\alpha)B(R) - \alpha b(q),$$

где точка $R = (r_1, r_2) = \bigl(\frac{p-\alpha q}{1-\alpha}, \frac{p^2-\alpha q^2}{1-\alpha} + 1\bigr)$, как было показано, лежит в области Ω. Условие (3) равносильно неравенству $H(p,q) \geqslant 0$.

Лемма 4.6. *Оценка $H(p,q) \geqslant 0$ справедлива при всех p и q, для которых $|q-p| \leqslant \tau$.*

Доказательство состоит из нескольких лемм, отвечающих за важные частные случаи, с последующим рассмотрением общего случая.

Лемма 4.7. *Если $p-\tau \leqslant q \leqslant p$, то $H(p,q) \geqslant 0$.*

Доказательство. Отметим, что функция H всюду непрерывно дифференцируема, и

$$\begin{aligned} H_q &= -(1-\alpha)\Bigl(B_{x_1}(R)\,\frac{\partial r_1}{\partial q} + B_{x_2}(R)\frac{\partial r_2}{\partial q}\Bigr) - \alpha(B_{x_1}(Q) + 2q\,B_{x_2}(Q)) \\ &= \alpha\Bigl(B_{x_1}(R) + 2qB_{x_2}(R) - B_{x_1}(Q) - 2qB_{x_2}(Q)\Bigr). \end{aligned}$$

Более того, у функции H всюду есть обобщённые вторые производные, и вторая производная по переменной q задаётся формулой

$$\begin{aligned} H_{qq} = &-\alpha\biggl(\frac{\alpha}{1-\alpha}\Bigl[B_{x_1x_1}(R) + 4qB_{x_1x_2}(R) + 4q^2B_{x_2x_2}(R)\Bigr] \\ &+ \Bigl[B_{x_1x_1}(Q) + 4qB_{x_1x_2}(Q) + 4q^2B_{x_2x_2}(Q)\Bigr]\biggr) + 2\alpha(B_{x_2}(R) - B_{x_2}(Q)). \end{aligned}$$

Поскольку функция B локально вогнута, два выражения в квадратных скобках неположительны. И кроме того, справедливо неравенство

$$B_{x_2}(R) \geqslant B_{x_2}(Q),$$

которое мы сейчас поясним. Если $R \in \Omega_-$, то $Q \in \Omega_-$, и точка (v_r, v_r^2+1) расположена правее точки R, а стало быть, и правее точки Q. Следовательно, $B_{x_2}(R) = \frac{s_r}{2} \geqslant \frac{s_q}{2} = B_{x_2}(Q)$. Если $R \in \Omega_0$, то $B_{x_2}(R) = \frac{1}{2\sqrt{r_2}}$, а если $R \in \Omega_+$, то $B_{x_2}(R) = \frac{1}{2\sqrt{r_2 - r_1^2}}$. В любом случае $B_{x_2}(R) \geqslant \frac{1}{2}$. А с другой стороны, если $Q \in \Omega_-$, то $B_{x_2}(Q) = \frac{s_q}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, и если $Q \in \Omega_+$, то $B_{x_2}(Q) = \frac{1}{2}$.

Итак, $H_{qq} \geqslant 0$, и, следовательно, функция H_q возрастает по переменной q при $q \leqslant p$. Но поскольку $H_q(p,p) = 0$, мы можем утверждать, что $H_q \leqslant 0$. Поэтому минимум функции H на интервале $q \in [p-\tau, p]$ достигается в правом конце, то есть при $q = p$. А так как $H(p,p) = 0$, этот минимум равен нулю. □

Итак, в дальнейшем мы можем считать, что $p \leqslant q$. Более того, заметим, что, если $P \in \Omega_+$, то отрезок $[R,Q]$ лежит в области $\Omega_0 \cup \{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant x_1^2\}$. Поскольку функция $x_1 + \sqrt{x_2 - x_1^2}$ является выпуклой в области $\{x_2 \geqslant x_1^2\}$, функция B допускает локально выпуклое расширение в область

$$\Omega_0 \cup \{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant x_1^2\},$$

что влечёт неравенство $H(p,q) \geqslant 0$. Поэтому мы можем предполагать, что $P \in \Omega_-$.

Лемма 4.8. *Если $R \in \Omega_0$, то $H(p,q) \geqslant 0$.*

Доказательство. В этом случае обязательно $P \in \Omega_1$ и $Q \in \Omega_+$. Поэтому

$$b(p) = \frac{1}{2}\, s_p(s_p^2 + 1), \quad B(R) = r_1 + \sqrt{r_2}, \quad b(q) = q + 1.$$

Учтём, что $r_2 \leqslant 1$ и $B(R) \leqslant r_1 + 1 = \frac{p - \alpha q}{1-\alpha} + 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} H(p,q) &= \frac{1}{2}\, s_p(s_p^2+1) - (1-\alpha)(r_1 + \sqrt{r_2}) - \alpha(q+1) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\, s_p(s_p^2+1) - (1-\alpha)\Big(\frac{p-\alpha q}{1-\alpha} + 1\Big) - \alpha(q+1) \\ &= \frac{1}{2}\, s_p(s_p^2+1) - p - 1 = \frac{1}{2}\, s_p(s_p^2+1) - \frac{1}{2}\Big(3s_p - \frac{1}{s_p}\Big) \\ &= \frac{1}{2s_p}\,(s_p^2 - 1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

□

Теперь всегда будем предполагать, что $R \in \Omega_-$. Пусть u, v, v^+ — горизонтальные координаты трёх точек на экстремальной траектории, проходящей через точку R: точки пересечения с границей Γ_0, левой точки пересечения с границей Γ_1 и, соответственно, правой точки пересечения с границей Γ_1 (две последние точки могут совпадать). Из линейности функции B вдоль экстремальной траектории следует равенство

$$B(R) = \frac{r_1 - u}{v - u}\, b(v).$$

Введём обозначения $\xi = v - u$, $\theta = \frac{r_1 - u}{v-u}$ и $\delta = q - p$. Тогда, с одной стороны,

$$r_2 - r_1^2 = (1-\theta)u^2 + \theta(v^2+1) - ((1-\theta)u + \theta v)^2 = \theta + \theta(1-\theta)\xi^2,$$

а с другой стороны,

$$r_2 - r_1^2 = \frac{p^2+1-\alpha(q^2+1)}{1-\alpha} - \Big(\frac{p-\alpha q}{1-\alpha}\Big)^2 = 1 - \frac{\delta^2}{\tau^2}.$$

Поэтому

$$\delta = \tau\sqrt{(1-\theta)(1-\xi^2\theta)}. \tag{4.12}$$

Кроме того, так как $r_1 = \theta\xi + u = v - (1-\theta)\xi$, то

$$p = v - (1-\theta)\xi + \frac{\alpha\delta}{1-\alpha}, \qquad q = v - (1-\theta)\xi + \frac{\delta}{1-\alpha}. \tag{4.13}$$

Нам также понадобится выражение для v^+ в терминах v и ξ. Так как

$$\frac{(v^+)^2 - v^2}{v^+ - v} = \frac{v^2+1-u^2}{v-u} = v + u + \frac{1}{v-u},$$

то мы имеем

$$v^+ = v + \frac{1}{\xi} - \xi. \tag{4.14}$$

Ясно, что есть только две возможности взаимного расположения чисел p, q, v, v^+: или $v \leqslant p \leqslant q \leqslant v^+$, или $p \leqslant v \leqslant v^+ \leqslant q$. Сперва мы рассмотрим два ключевых специальных случая: $p = v \leqslant v^+ = q$ и $p \leqslant v = v^+ \leqslant q$.

Лемма 4.9. *Если $p = v$ и $q = v^+$, то $H(p,q) \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $V = (v, v^2+1)$ и $V^+ = (v^+, (v^+)^2+1)$. Тогда $r_1 = \frac{v-\alpha v^+}{1-\alpha}$ и

$$\frac{r_1 - u}{v-u} = \frac{\frac{v-\alpha(v+1/\xi-\xi)}{1-\alpha} - (v-\xi)}{\xi} = \frac{1}{1-\alpha}\Big(1 - \frac{\alpha}{\xi^2}\Big).$$

Следовательно,

$$H(p,q) = H(v,v^+) = b(v) - (1-\alpha)\frac{r_1-u}{v-u}\,b(v) - \alpha b(v^+) = \alpha\Big(\frac{b(v)}{\xi^2} - b(v^+)\Big).$$

Таким образом, доказательство леммы состоит в проверке неравенства

$$\frac{b(v)}{\xi^2} - b(v^+) \geqslant 0. \tag{4.15}$$

Теперь специфика исследования этого неравенства будет зависеть от положения точки V. Согласно замечанию 4.2, нам достаточно рассмотреть два случая: $V \in \Omega_2$ и $V \in \Omega_1$.

Случай $V \in \Omega_1$ является более лёгким, и мы начнём с него. В этом случае $v = \frac{1}{2}(3\xi - \frac{1}{\xi}) - 1$ и $b(v) = \frac{1}{2}(\xi^3 + \xi)$. Кроме того, $v^+ = v + \frac{1}{\xi} - \xi = \frac{1}{2}(\xi + \frac{1}{\xi}) - 1$. То есть $v^+ \geqslant 0$ и $b(v^+) = v^+ + 1 = \frac{1}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})$. Таким образом,

$$\frac{b(v)}{\xi^2} - b(v^+) = \frac{\frac{1}{2}(\xi^3 + \xi)}{\xi^2} - \frac{1}{2}\Big(\xi + \frac{1}{\xi}\Big) = 0.$$

Если $V \in \Omega_2$, то $v = \frac{1}{2}(\xi + \frac{1}{\xi}) - \tau - 1$ и $b(v) = \frac{\alpha}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})$. Кроме того, $v^+ = v + \frac{1}{\xi} - \xi = \frac{1}{2}(\frac{3}{\xi} - \xi) - \tau - 1$. Значение $b(v^+)$ определяется положением точки V^+, и у нас есть три возможности: $V^+ \in \Omega_2$, $V^+ \in \Omega_1$ и $V^+ \in \Omega_+$.

Если $V^+ \in \Omega_2$, то $b(v^+) = \alpha(v^+ + \tau + 1) = \frac{\alpha}{2}(\frac{3}{\xi} - \xi)$. Следовательно,

$$\frac{b(v)}{\xi^2} - b(v^+) = \frac{\frac{\alpha}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})}{\xi^2} - \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{3}{\xi} - \xi\Big) = \frac{\alpha}{2\xi^3}\,\big(1 - \xi^2\big)^2 \geqslant 0.$$

Если $V^+ \in \Omega_+$, то $b(v^+) = v^+ + 1 = \frac{1}{2}(\frac{3}{\xi} - \xi) - \tau$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{b(v)}{\xi^2} - b(v^+) &= \frac{\frac{\alpha}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})}{\xi^2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{\xi} - \xi\Big) + \tau = \frac{1}{2\xi^3}\,\big(\xi^4 + 2\tau\xi^3 + (\alpha - 3)\xi^2 + \alpha\big)\\ &= \frac{1}{2\xi^3}\,\big(\xi - \sqrt{\alpha}\big)^2\Big(\xi^2 + \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\,\xi + 1\Big) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Наконец, если $V^+ \in \Omega_1$, то $v^+ = \frac{1}{2}(3z - \frac{1}{z}) - 1$ и $b(v^+) = \frac{1}{2}(z^3 + z)$, для некоторого значения параметра $z \in [\sqrt{\alpha}, 1]$. Поэтому равенство $v^+ = \frac{1}{2}(\frac{3}{\xi} - \xi) - \tau - 1$ запишется в виде

$$3z - \frac{1}{z} = \frac{3}{\xi} - \xi - 2\tau. \tag{4.16}$$

Тогда

$$\frac{b(v)}{\xi^2} - b(v^+) = \frac{1}{2}\Big[\alpha\Big(\frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi}\Big) - (z^3 + z)\Big].$$

Посмотрим на необходимое неравенство под совсем другим углом: фиксируем значение величины $z \in (0, 1]$ и последнее выражение в квадратных скобках будем рассматривать как функцию от α: положим $S(\alpha) = \alpha\big(\frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi}\big) - (z^3 + z)$, где $0 < \alpha \leqslant z^2$, а величина $\xi = \xi(\alpha)$ — это положительное решение уравнения (4.16). Сосчитав производную $\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{\alpha^{-3/2} + \alpha^{-1/2}}{3/\xi^2 + 1}$, получаем

$$\begin{aligned}S'(\alpha) = \alpha\Big(-\frac{3}{\xi^4} - \frac{1}{\xi^2}\Big)\frac{d\xi}{d\alpha} + \frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi} &= -\frac{\alpha}{\xi^2}\,(\alpha^{-3/2} + \alpha^{-1/2}) + \frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi}\\ &= \frac{1}{\xi^3}\,(\xi - \sqrt{\alpha})\Big(\xi - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Big) \leqslant 0,\end{aligned}$$

поскольку по определению области Ω_1 в ней $v-u=s\in[\sqrt{\alpha},1]$, то есть $\sqrt{\alpha}\leqslant\xi\leqslant 1\leqslant\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Таким образом, чтобы доказать неравенство $S(\alpha)\geqslant 0$, достаточно показать, что $S(z^2)\geqslant 0$. Из тождества (4.16) мы делаем вывод, что если $\alpha=z^2$, то $z+\frac{1}{z}=\frac{3}{\xi}-\xi$, и, следовательно,

$$S(z^2)=z^2\Big(\frac{1}{\xi^3}+\frac{1}{\xi}\Big)-(z^3+z)=z^2\Big[\frac{1}{\xi^3}+\frac{1}{\xi}-\Big(\frac{3}{\xi}-\xi\Big)\Big]=\frac{z^2}{\xi^3}\,(1-\xi^2)^2\geqslant 0.$$

Доказательство завершено. □

Лемма 4.10. *Если $v=v^+$ и $p\leqslant v\leqslant q$, то $H(p,q)\geqslant 0$.*

Доказательство. Условие $v=v^+$ означает, что экстремальная траектория является касательной к кривой Γ_1. Для всех таких касательных траекторий $v=-k\tau$ при некотором целом $k\geqslant 1$, и эти траектории разделяют области Ω_{2k} и Ω_{2k+1}. Для наших целей достаточно рассматривать $v=-\tau$, что отвечает границе между областями Ω_2 и Ω_3.

Теперь у нас $\xi=1$, и, следовательно, из равенства (4.12) вытекает, что $\theta=\frac{r_1-u}{v-u}=1-\frac{\delta}{\tau}$. Поскольку $b(v)=\alpha$, неравенство $H(p,q)\geqslant 0$ можно переписать в виде

$$D(\delta):=b(p)-(1-\alpha-\sqrt{\alpha}\delta)\alpha-\alpha b(q)\geqslant 0,$$

и по формулам (4.13)

$$p=v-\frac{\sqrt{\alpha}\delta}{1+\sqrt{\alpha}},\quad q=v+\frac{\delta}{1+\sqrt{\alpha}}.$$

Областью определения функции D является промежуток $[0,\tau]$. Ясно, что $D(0)=0$ и $D(\tau)=0$.

Производная функции D равна

$$D'(\delta)=-\frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\,b'(p)+\alpha\sqrt{\alpha}-\alpha\,b'(q)\,\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}.$$

Приравнивая нулю производную $D'(\delta)$ и используя тот факт, что $b'(v)=\alpha$, мы получаем равенство

$$\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\,b'(p)+\frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\,b'(q)=b'(v).\tag{4.17}$$

Для доказательства леммы мы сперва убедимся, что $D'(\tau)<0$, а потом покажем, что уравнение (4.17) имеет не более одного корня δ^* на промежутке $(0,\tau)$. Поскольку $D(0)=0$, из этого будет вытекать, что корень δ^* в точности один, и это — точка локального максимума. Таким образом, минимум функции D достигается в концах промежутка $[0,\tau]$, где функция равна нулю.

Для проверки неравенства $D'(\tau) < 0$ мы перепишем его в виде

$$\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\, b'(p_*) + \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\, b'(p_* + \tau) > \alpha,$$

где $p_* = v - \frac{\sqrt{\alpha}\tau}{1+\sqrt{\alpha}} = -\tau - 1 + \sqrt{\alpha}$. Поскольку $b'(p_* + \tau) = \frac{b'(p_*)}{\alpha}$, последнее неравенство переписывается в простом виде:

$$b'(p_*) > \alpha^{3/2}. \tag{4.18}$$

Так как $(p_*, p_*^2 + 1) \in \Omega_3$, то $p_* = \frac{1}{2}(3x_* - \frac{1}{x_*}) - \tau - 1$ для некоторого $x_* \in [\sqrt{\alpha}, 1]$. Сравнивая два выражения для p_*, приходим к уравнению для x_*: $3x_* - \frac{1}{x_*} = 2\sqrt{\alpha}$, у которого в промежутке $x_* \in [\sqrt{\alpha}, 1]$ есть единственный корень $x_* = \frac{1}{3}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + 3})$. Поскольку $b'(p_*) = \alpha x_*^2$, неравенство (4.18) принимает вид $x_*^2 > \sqrt{\alpha}$, то есть

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + 3} > 3\alpha^{1/4},$$

что, как легко видеть, справедливо для всех $\alpha \in (0, 1)$.

Теперь мы покажем что уравнение (4.17) имеет не более одного корня на интервале $(0, \tau)$. Ключевым здесь является тот факт, что функция b' строго выпукла на промежутке $[p_2, -\tau]$ и нестрого выпукла на промежутке $[-\tau, 0]$. Действительно, если $t \in [p_2, -\tau]$, то $b'(t) = \alpha x^2$, где x — это единственное решение уравнения $t = \frac{1}{2}(3x - \frac{1}{x}) - \tau - 1$ из промежутка $[\sqrt{\alpha}, 1]$ ($x = \frac{s}{\alpha}$ из формулы (4.9)). Ясно, что x, как функция от t, является возрастающей и строго выпуклой, поэтому такой же является функция b'. При $t \in [-\tau, p_1]$ функция $b'(t)$ постоянна и равна α, а при $t \in [p_1, 0]$ функция b' опять же является выпуклой, что доказывается теми же рассуждениями, которые приводились для промежутка $[p_2, -\tau]$. Поскольку функция b' возрастает, она выпукла на всём промежутке $[-\tau, 0]$.

Предположим теперь, что δ_1, δ_2 — два корня уравнения (4.17), $0 < \delta_1 < \delta_2 < \tau$. Тогда $q(\delta_2) > q(\delta_1)$, что, в силу выпуклости функции b' справа от точки v, влечёт неравенство

$$\frac{b'(q(\delta_2)) - b'(v)}{q(\delta_2) - v} \geqslant \frac{b'(q(\delta_1)) - b'(v)}{q(\delta_1) - v}.$$

Согласно тождеству (4.17), имеет место равенство $\frac{b'(q)-b'(v)}{q-v} = \frac{b'(v)-b'(p)}{v-p}$, следовательно,

$$\frac{b'(v) - b'(p(\delta_2))}{v - p(\delta_2)} \geqslant \frac{b'(v) - b'(p(\delta_1))}{v - p(\delta_1)}.$$

Однако, с другой стороны, справедливо неравенство $p(\delta_2) < p(\delta_1)$, из которого, в силу строгой выпуклости функции b' слева от точки v, вытекает

оценка
$$\frac{b'(v)-b'(p(\delta_2))}{v-p(\delta_2)}<\frac{b'(v)-b'(p(\delta_1))}{v-p(\delta_1)}.$$
Это противоречие доказывает, что существует не более одного корня уравнения (4.17) на промежутке $(0,\tau)$. (Как было отмечено выше, на самом деле существует ровно один корень, см. рисунок 2.) Это противоречие завершает доказательство. □

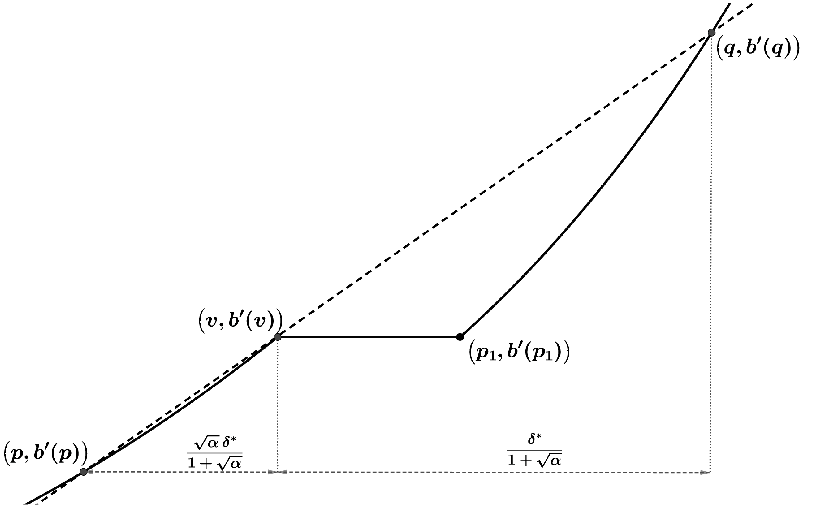

Рис. 2. Корень δ^* уравнения $D'(\delta)=0$.

Для упрощения дальнейших вычислений нам нужно рассмотреть ещё один специальный случай. Напомним определение (2.10) чисел p_k: $p_0=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}+\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}-1,\quad p_k=p_0-k\tau.$

Лемма 4.11. *Если $k\geqslant 1$, $p\in[p_k,-k\tau]$ и $q\in[p,p_{k-1}]$, то $H(p,q)\geqslant 0$.*

Доказательство. Доказательство опирается на тот факт, что для таких p и q существует функция $\widetilde{B}$, которая совпадает с B в точках P, Q и R и является локально вогнутой в области, содержащей отрезок $[R,Q]$. В соответствии с замечанием 4.2 достаточно рассмотреть случай $k=1$.

Рассмотрим экстремали $\{\ell_s\}_{\sqrt{\alpha}\leqslant s\leqslant 1}$, соединяющие точки $(u(s),u^2(s))$ и $(v(s),v^2(s)+1)$, где $u(s)$ и $v(s)$ определяются формулами (2.14). Каждая точка $x\in\Omega_1$ лежит на одной такой экстремали, и $B(x)$ определяется формулой (2.15). Для каждого значения s обозначим через $\widetilde{\ell}_s$ продолжение сегмента ℓ_s до второй точки пересечения с кривой Γ_1. Таким образом, $\widetilde{\ell}_s$

соединяет точки $(u(s), u^2(s))$ и $(v^+(s), (v^+(s))^2+1)$, где $v^+(s)$ дано формулой (4.14) с $\xi = s$: $v^+(s) = v(s) + \frac{1}{s} - s$. Пусть ω_1 — это область, лежащая под $\widetilde{\ell}_{\sqrt{\alpha}}$ и над Γ_1 :

$$\omega_1 = \{x\colon\ : p_1 \leqslant x_1 \leqslant p_0,\ x_1^2+1 \leqslant x_2 \leqslant (p_1+p_0)x_1 - p_1p_0 + 1\}.$$

Обозначим $\widetilde{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \omega_1$; см. рисунок 3. Тогда каждая точка $x \in \widetilde{\Omega}_1$ лежит на одном отрезке $\widetilde{\ell}_s$. Для того чтобы определить $\widetilde{B}(x)$, мы просто распространим определение (2.15) на $\widetilde{\Omega}_1$:

$$\widetilde{B}(x) = \frac{1}{2}\,(1+s^2)(x_1 - u).$$

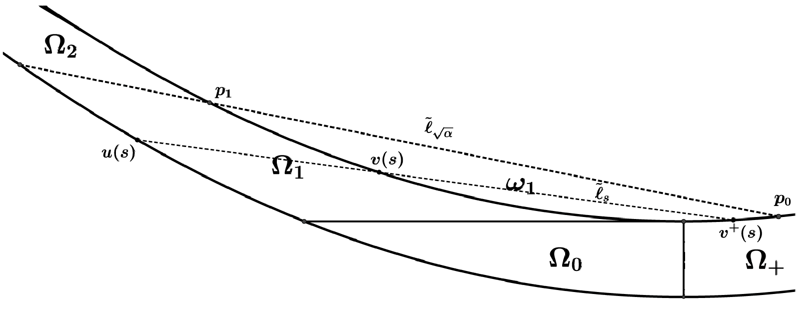

Рис. 3. Область $\widetilde{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \omega_1$ и отрезок $\widetilde{\ell}_s$.

Заметим, что $\widetilde{B}(x) = B(x)$ для всех $x \in \Gamma_1 \cap \{0 \leqslant p_0\}$. Кроме того, аргумент леммы 4.4 работает без всяких изменений, и мы можем заключить, что функция $\widetilde{B}$ локально вогнута в $\widetilde{\Omega}_1$.

Положим $\widetilde{B}(x) = B(x)$ для $x \in \Omega_2$; тогда $\widetilde{B}$ локально вогнута в области $\Omega_2 \cup \widetilde{\Omega}_1$. Остаётся только заметить, что если p и q такие, как в утверждении леммы, то $[R, Q] \in \Omega_2 \cup \widetilde{\Omega}_1$, и потому

$$H(p,q) = B(P) - (1-\alpha)B(R) - \alpha B(Q) = \widetilde{B}(P) - (1-\alpha)\widetilde{B}(R) - \alpha\widetilde{B}(Q) \geqslant 0. \quad \square$$

Замечание 4.12. Доказательство леммы 4.6 было бы много короче, если бы подобное локально вогнутое расширение, покрывающее все подходящие отрезки $[R, Q]$, существовало и для области Ω_2. К сожалению, это не так: максимально возможное расширение Ω_2 ограничено огибающей экстремалей, соответствующих точкам этой области; так как эта огибающая выпукла и находится вне Ω (см. рисунок 4 в следующем параграфе), эта максимальная область недостаточна для наших целей.

Теперь мы можем завершить доказательство леммы 4.6.

Доказательство общего случая. Все тройки точек R, P, Q из условия (3) леммы 4.1 мы параметризуем положением экстремальной траектории, проходящей через точку R, и положением самой точки R на этой траектории. Возьмём число $\xi \in [\sqrt{\alpha}, 1]$. Полагая $v - u = \xi$ и фиксируя область Ω_k, где расположена точка R, мы однозначно определяем значение v. Пусть $V(\xi) = (v, v^2 + 1)$ и $U(\xi) = (u, u^2)$.

Теперь возьмём такое число $\theta \in [0, 1]$, что $R = (1 - \theta)U(\xi) + \theta V(\xi)$. Это в свою очередь задаёт как функции от аргументов ξ и θ две точки $P(\xi, \theta) = (p, p^2 + 1)$ и $Q(\xi, \theta) = (q, q^2 + 1)$, для которых $P = (1 - \alpha)R + \alpha Q$ и $p \leqslant q$.

Используя равенства (4.13), мы видим, что для проверки неравенства $H(p, q) \geqslant 0$ при всех таких p, q, что точка $R = \frac{P - \alpha Q}{1 - \alpha}$ лежит на экстремали с концами U и V, нам нужно показать, что функция

$$\begin{aligned} W(\xi, \theta) := b\Big(v - (1 - \theta)\xi + \frac{\alpha\delta}{1 - \alpha}\Big) \\ - (1 - \alpha)\theta b(v) - \alpha b\Big(v - (1 - \theta)\xi + \frac{\delta}{1 - \alpha}\Big) \end{aligned} \tag{4.19}$$

неотрицательна в области $\{\sqrt{\alpha} \leqslant \xi \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$.

Сперва рассмотрим границу этой области. Если $\theta = 0$, то $\delta = \tau$, и поэтому $W = b(p) - \alpha b(p + \tau) = 0$. Если $\theta = 1$, то $R = P = Q$, и $W = 0$. Если $\xi = \sqrt{\alpha}$, то траектория, соединяющая точки U и V, разделяет области Ω_{2k-1} и Ω_{2k} для некоторого $k \geqslant 1$. Следовательно, $v = p_k$ и $v^+ = v + \tau = p_{k-1}$, где числа p_k определяются формулой (2.10), а v^+ вычисляется по формуле (4.14). Так как $q - p \leqslant \tau$, то $v \leqslant p \leqslant q \leqslant v^+$, и поэтому $W \geqslant 0$ по лемме 4.11. И, наконец, если $\xi = 1$, то $W \geqslant 0$ по лемме 4.10.

Теперь проверим, что у функции W нет отрицательных экстремумов внутри области. Частные производные равны

$$W_\theta = b'(p)\Big(\xi + \frac{\alpha\delta_\theta}{1 - \alpha}\Big) - (1 - \alpha)b(v) - \alpha b'(q)\Big(\xi + \frac{\delta_\theta}{1 - \alpha}\Big)$$

и

$$W_\xi = b'(p)\Big(v_\xi - 1 + \theta + \frac{\alpha\delta_\xi}{1 - \alpha}\Big) - (1 - \alpha)\theta b'(v)v_\xi - \alpha b'(q)\Big(v_\xi - 1 + \theta + \frac{\delta_\xi}{1 - \alpha}\Big).$$

Полагая W_θ и W_ξ равными 0, после небольших преобразований мы получим следующее уравнение для $b'(p)$:

$$\begin{aligned} &b'(p)\big[\delta_\xi \xi - (v_\xi - 1 + \theta)\delta_\theta\big] \\ &\quad = (1 - \alpha)\bigg(b(v)\Big(v_\xi - 1 + \theta + \frac{\delta_\xi}{1 - \alpha}\Big) - \theta b'(v)v_\xi\Big(\xi + \frac{\delta_\theta}{1 - \alpha}\Big)\bigg). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Равенство (4.12) даёт $\delta_\theta = \frac{\tau^2}{\delta}\,(\xi^2\theta - \frac{1+\xi^2}{2})$ и $\delta_\xi = -\frac{\tau^2}{\delta}\,\xi\theta(1-\theta)$. Далее, из формул (4.7) и (4.9) нетрудно видеть, что $b'(v) = \frac{2\xi}{\xi^2+1}\,b(v)$. Подставляя эти выражения в (4.20) и упрощая полученные выражения, мы видим, что левая часть принимает вид

$$-b'(p)\,\frac{\tau^2}{2\delta}\,\big[(1+\xi^2)(1-\theta) + v_\xi(2\xi^2\theta - 1 - \xi^2)\big],$$

а правая часть —

$$-b'(v)\,\frac{1-\alpha}{2\xi}\,\Big(\frac{1-\alpha}{\alpha\delta}\,\theta\xi + 1\Big)\big[(1+\xi^2)(1-\theta) + v_\xi(2\xi^2\theta - 1 - \xi^2)\big].$$

Нетрудно показать, что ни при каком положении точки V общий множитель в этих двух выражениях не обращается в ноль, кроме случая $\theta = 1$ и $\xi = 1$, когда, конечно, $W = 0$. Таким образом, во всех остальных случаях после сокращений и преобразований уравнение (4.20) принимает вид

$$b'(p) = b'(v)\Big(1 - \frac{v-p}{\xi}\Big). \tag{4.21}$$

Теперь мы хотим рассмотреть все возможные положения точки R или, что то же самое, точки V. Согласно замечанию 4.2 нам достаточно рассмотреть два случая: $V \in \Omega_1$ и $V \in \Omega_2$.

Сперва предположим, что $V \in \Omega_1$. Тогда $v = \frac{1}{2}(3\xi - \frac{1}{\xi}) - 1$ и $b'(v) = \xi^2$. Тогда обязательно и $P \in \Omega_1$ (иначе, $q > p+\tau$), то есть $p = \frac{1}{2}(3z - \frac{1}{z}) - 1$ для некоторого $z \in [\sqrt{\alpha}, 1]$ и $b'(p) = z^2$. Тогда соотношение (4.21) принимает вид

$$z^2 = \xi^2\bigg(1 - \frac{\frac{1}{2}(3\xi - \frac{1}{\xi}) - \frac{1}{2}(3z - \frac{1}{z})}{\xi}\bigg) \quad\Longrightarrow\quad \xi^2 - \xi\Big(3z - \frac{1}{z}\Big) + 2z^2 - 1 = 0.$$

Отсюда получаем, что или $\xi = z$, или $\xi = 2z - \frac{1}{z}$. В первом случае $p = v$, и, стало быть, $W \geqslant 0$. А во втором случае $\xi \leqslant z$, то есть $p \geqslant v \geqslant p_1$, что означает $q \leqslant v^+ \leqslant p_0$, так что $W \geqslant 0$ по лемме 4.11

Теперь предположим, что $V \in \Omega_2$. Это означает, что $v = \frac{1}{2}(\xi + \frac{1}{\xi}) - \tau - 1$ и $b'(v) = \alpha$. Из геометрии ясно, что либо $P \in \Omega_1$, либо $P \in \Omega_2$, либо $P \in \Omega_3$. Если $P \in \Omega_1$, то приложима лемма 4.11, следовательно, $W \geqslant 0$. Если $P \in \Omega_2$, то $b'(p) = \alpha$ и равенство (4.21) нам даёт $p = v$, а тогда $W \geqslant 0$ по лемме 4.9. Если $P \in \Omega_3$, то $p = \frac{1}{2}(3z - \frac{1}{z}) - \tau - 1$ для некоторого $z \in [\sqrt{\alpha}, 1]$ и $b'(p) = \alpha z^2$. В этом случае равенство (4.21) принимает вид

$$z^2 = 1 - \frac{\frac{1}{2}(\xi + \frac{1}{\xi}) - \frac{1}{2}(3z - \frac{1}{z})}{\xi} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi}\Big(3z - \frac{1}{z}\Big) + 2z^2 - 1 = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\frac{1}{\xi}$, получаем либо $\frac{1}{\xi}=z$, либо $\frac{1}{\xi}=2z-\frac{1}{z}$. Поскольку $z\leqslant 1$ и $\xi\leqslant 1$, то единственное возможное решение в обоих случаях — это $\xi=1$ и $z=1$. Это означает, что точки R, P и Q совпадают, и $W=0$. □

§5. Как найти беллмановского кандидата B

Напомним обозначения: $\Omega_-=\bigcup_{k\geqslant 1}\Omega_k$, $\Omega_*=\bigcup_{k\geqslant 0}\Omega_k$. Прямым вычислением находим беллмановского кандидата B в области Ω_0, которая является максимальной выпуклой частью области Ω_*, которая содержит границу $x_1=0$. А именно, используя те же соображения, что приведены в работах [16] и [18], мы ищем на области S функцию $A(x;L)=L+B(T_Lx)$, которая удовлетворяет однородному уравнению Монжа–Ампера по переменой x, то есть $A_{x_1x_1}A_{x_2x_2}=A^2_{x_1x_2}$, и граничному условию $\frac{\partial A}{\partial L}|_{x_1=L}=0$. Перенесённые на функцию B, эти требования приводят к решению $B(x)=x_1+\sqrt{x_2}$ в области Ω_0. Поскольку мы хотим, чтобы функция B удовлетворяла условию (2) леммы 2.8 (при $L=0$), функция B в области Ω_+ должна иметь вид $B(x)=x_1+\sqrt{x_2-x_1^2}$.

Для построения B в области Ω_- мы сперва сосчитаем её на верхней границе, а затем решим некоторую граничную задачу для уравнения Монжа–Ампера. Чтобы найти формулу для функции $b(x_1):=B(x_1,x_1^2)$, мы мы используем идею из статьи [6]. В этой работе Мелас находит функцию Беллмана для диадического максимального оператора в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$. Его функция Беллмана — назовём её здесь $\boldsymbol{B}$ — также зависит от трёх переменных x_1,x_2 и L, и определена она таким же образом, как в формуле (2.1). Сперва он находит функцию $\boldsymbol{B}(x;\,x_1)$, а затем уже, используя её, находит общую формулу для функции $\boldsymbol{B}(x;L)$. Мы используем здесь довольно похожие рассуждения, хотя ситуация тут значительно сложнее из-за того, что область Ω_- не является выпуклой из-за BMO-ограничения $x_2\leqslant x_1^2+1$, которое в работе [6] отсутствует.

5.1. Кандидат в области Ω_1. Используя вариант приёма Меласа, мы ищем формулу для функции $b(x_1)=B(x_1,x_1^2+1)$ в виде

$$b(x_1)=\sup\{(1-s^2)L+s^2(y_1+1)\}=\sup\{s^2(y_1+1)\}, \tag{5.1}$$

где sup берётся по всем значениям параметра $s\in[0,1]$ и по всем точкам $y=(y_1,y_1^2+1)$, для которых найдётся такая точка $z\in\Omega$ из области (то есть $z=(z_1,z_2)$ и $0\leqslant z_2-z_1^2\leqslant 1$), что $x=(x_1,x_1^2+1)$ является выпуклой комбинацией точек y и z: $x=(1-s^2)z+s^2y$. Область допустимых значений переменной y_1 определяется условием

$$z_2 = \frac{x_1^2 - s^2 y_1^2}{1 - s^2} + 1 \geqslant \left(\frac{x_1 - s^2 y_1}{1 - s^2}\right)^2 = z_1^2,$$

что приводит к ограничению $|y_1 - x_1| \leqslant \frac{1-s^2}{s}$. Следовательно, супремум в выражении (5.1) достигается при $y_1 = x_1 + \frac{1-s^2}{s}$:

$$b(x_1) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} \left\{ s - s^3 + (1 + x_1)s^2 \right\}.$$

Введём параметр $\eta = 1 + x_1$. Так как $x_1 \leqslant 0$, то $\eta \leqslant 1$. Мы ищем максимальное значение кубического полинома $-s^3 + \eta s^2 + s$ на промежутке $s \in [0, 1]$. Его производная $-3s^2 + 2\eta s + 1$ имеет два корня разных знаков. Положительный корень

$$s = \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 + 3}}{3} \tag{5.2}$$

лежит в промежутке $[0, 1]$. Следовательно, супремум в определении функции b достигается именно при этом конкретном значении s. Теперь мы букву s будет рассматривать уже не как свободный параметр, а как функцию от переменной x_1 определённую выражением (5.2), и тогда

$$b(x_1) = s + \eta s^2 - s^3 = \frac{1}{2} s(s^2 + 1) =: h(s). \tag{5.3}$$

Теперь, определив функцию b, мы хотим найти минимальную локально вогнутую функцию B в области Ω_-, удовлетворяющую двум граничным условиям: $B|_{\Gamma_1} = b$ и $B|_{\Gamma_0} = 0$. График любой такой функции является линейчатой поверхностью. Таким образом, область Ω_- заметается прямолинейными отрезками вдоль которых функция B линейна, а её градиент постоянен (мы уже использовали название “экстремали” для таких отрезков). Пусть точки (u, u^2) и $(v, v^2 + 1)$ являются концами экстремали. Это означает, что касательные векторы к граничным кривым графика функции B лежат в одной плоскости с линией, соединяющей точки $(u, u^2, B(u, u^2)) = (u, u^2, 0)$ и $(v, v^2 + 1, b(v))$. Следовательно,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2u & 0 \\ 1 & 2v & b'(v) \\ v - u & v^2 + 1 - u^2 & b(v) \end{pmatrix} = 0.$$

Это условие приводит к следующему уравнению:

$$(v - u)^2 - 2\frac{b(v)}{b'(v)}(v - u) + 1 = 0, \tag{5.4}$$

которое явно задаёт первую координату u конца экстремали на границе Γ_0 как функцию первой координаты v её другого конца на границе Γ_1. Решим это уравнение для нашей конкретной функции b. Так как $\frac{ds}{d\eta} = \frac{2s^2}{3s^2+1}$ и $\frac{d\eta}{dx_1} = 1$, то

$$b'(v) = h'(s)\,\frac{2s^2}{3s^2+1} = \frac{1}{2}(3s^2+1)\cdot\frac{2s^2}{3s^2+1} = s^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{b(v)}{b'(v)} = \frac{s^2+1}{2s}.$$

Таким образом, уравнение (5.4) имеет корни $v-u=s$ и $v-u=\frac{1}{s}$. Из геометрических соображений ясно, что $|v-u|\leqslant 1$, поэтому мы должны взять первый корень, $v-u=s$. Итак,

$$u = v - s.$$

Символ s, $s\in(0,1]$, удобно использовать для параметризации наших экстремалей. Тогда экстремаль ℓ_s — это отрезок, который соединяет точки (v, v^2+1) и (u, u^2), где

$$v = v(s) = \frac{1}{2}\left(3s - \frac{1}{s}\right) - 1, \quad u = u(s) = v(s) - s = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right) - 1. \tag{5.5}$$

Таким образом, наклон экстремали ℓ_s равен $\frac{v^2+1-u^2}{v-u} = -2(1-s)$, и уравнение прямой ℓ_s имеет вид

$$x_2 = -2(1-s)(x_1-u) + u^2 = -2(1-s)x_1 + \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{2} + 2s - \frac{3}{4}s^2. \tag{5.6}$$

Наконец, для произвольной точки $x\in\Omega_-$ мы положим

$$B(x) = \frac{x_1-u}{v-u}\,h(s) = \frac{1}{2}\,(1+s^2)(x_1-u),$$

где функция $s=s(x)$ задаётся равенством (5.6).

Отметим, что второй корень уравнения (5.4), который равен $v-u=\frac{1}{s}$, соответствует второй точке пересечения прямой ℓ_s с верхней параболой. Обозначая эту точку $(v^+, (v^+)^2+1)$, мы получим

$$v^+(s) = u(s) + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right) - 1. \tag{5.7}$$

Проверив необходимые свойства, мы убеждаемся, что построили минимальную локально вогнутую функцию в области Ω_- с заданными граничными значениями на $\Gamma_0\cap\Omega_-$ и на $\Gamma_1\cap\Omega_-$. Напомним, что нашей главной задачей является построение α-вогнутой функции в области Ω. Такая функция должна удовлетворять неравенству (2.7) при всех $\beta\in[\alpha,\frac{1}{2}]$. Однако, мы не хотим, чтобы функция была “слишком хорошей”, в том смысле, что она не обязана удовлетворять этому неравенству при меньших β. Другими словами, рассматривая в определении 2.6 сегмент $[x^-,x^+]$, мы хотим, чтобы часть отрезка $[x^-,x^+]$, расположенная вне Ω, была не больше, чем $1-\alpha$.

Применяя это требование к точкам $x^- = (u, u^2)$ и $x^+ = (v^+, (v^+)^2 + 1)$, получаем ограничение

$$\frac{v-u}{v^+-u} \geqslant \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad s^2 \geqslant \alpha.$$

Таким образом, в нашем построении мы ограничим параметр s промежутком $[\sqrt{\alpha}, 1]$. Тогда наименьшим значением координаты v будет $v = p_1 = \frac{3}{2}\sqrt{\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} - 1$ (см. (2.10)), это означает, что мы определили кандидата B в области Ω_1.

Теперь мы хотим найти огибающую семейства $\{\ell_s\}$. Пусть

$$x(s) = (x_1(s), x_2(s))$$

— это точка касания прямой ℓ_s и искомой огибающей. Тогда наклон прямой ℓ_s равен производной

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2'(s)}{x_1'(s)} = -2(1-s). \tag{5.8}$$

Следовательно, график функции $x(s)$ является вогнутой кривой, у которой начальный наклон равен нулю в точке $(0, 1)$, а предельный наклон равен -2. Дифференцируя уравнение (5.6) с $x_i = x_i(s)$, мы получим

$$x_2'(s) = -2(1-s)x_1'(s) + 2x_1(s) - \frac{1}{2s^3} + 2 - \frac{3}{2}\,s.$$

Учитывая соотношение (5.8), получим выражение для функции x_1, которое затем подставим в уравнение (5.6) и получим выражение для функции x_2:

$$x_1(s) = \frac{1}{4s^3} - 1 + \frac{3}{4}s = \frac{(1-s)^2(1+2s+3s^2)}{4s^3}, \quad x_2(s) = -\frac{2-3s-6s^3+6s^4-3s^5}{4s^3}.$$

Экстремальные траектории в области Ω_1 вместе с их огибающей показаны на рисунке 4.

5.2. Кандидат в оставшейся части области Ω_-. После того, как построена фолиация для кандидата B в области Ω_1, нам надо понять, как устроена фолиация левее экстремали $\ell_{\sqrt{\alpha}}$. Опять же сперва мы найдём функцию B на верхней параболе. Основная идея, лежащая в основе нашего определения, позаимствована из наших предыдущих работ про диадическое ВМО, в особенности из статьи [17]: мы постулируем, что основное неравенство α-выпуклости, то есть неравенство (2.7) (с $F = B$) обращается в равенство, когда $\beta = \alpha$, точка x^- лежит на границе Γ_0, а две другие точки, x^+ и $(1-\alpha)x^- + \alpha x^+$ лежат на границе Γ_1. Этот выбор интуитивно ясен из геометрических соображений, поскольку такая конфигурация максимизирует долю отрезка $[x^-, x^+]$, которая лежит снаружи от области.

Для всех $v \leqslant p_1$ положим

$$b(v) = (1-\alpha)B((v-\sqrt{\alpha}), (v-\sqrt{\alpha})^2) + \alpha b(v+\tau) = \alpha b(v+\tau). \tag{5.9}$$

Теперь мы ищем минимальную локально вогнутую функцию в области $\Omega_- \setminus \Omega_1$ с заданными граничными условиями на верхней и нижней границах. Для этого сперва определим фолиацию области экстремалями.

Сперва мы рассмотрим промежуток $v \in \big[-\tau, p_1\big]$, когда $v+\tau \geqslant 0$ и $b(v+\tau) = v+\tau+1$. Для таких значений v мы положим

$$b(v) = \alpha(v+\tau+1). \tag{5.10}$$

Теперь будет удобно параметризовать наши траектории ℓ_s параметром s таким образом, чтобы $v-u=\frac{\alpha}{s}$. Подставляя это выражения в уравнение (5.4) и учитывая, что $\frac{b(v)}{b'(v)} = v+\tau+1$, получаем уравнение

$$s^2 - 2v\alpha s - 2(1+\sqrt{\alpha}-\alpha)\sqrt{\alpha}s + \alpha^2 = 0.$$

Откуда

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\alpha}+\frac{\alpha}{s}\right) - \tau - 1, \quad u = v - \frac{\alpha}{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\alpha}-\frac{\alpha}{s}\right) - \tau - 1. \tag{5.11}$$

Когда s убывает от $\sqrt{\alpha}$ до α, координата v убывает от p_1 до $-\tau$. Переписывая выражение (5.10) для b в терминах s, получим:

$$b(v(s)) = \frac{\alpha^2}{2s}\left(1+\frac{s^2}{\alpha^2}\right) =: h(s). \tag{5.12}$$

Уравнение экстремали ℓ_s принимает вид

$$x_2 = 2\Big(\frac{s}{\alpha} - \tau - 1\Big)x_1 - \frac{3s^2}{4\alpha^2} + 2(\tau+1)\frac{s}{\alpha} + \frac{1}{2} - (\tau+1)^2 + \frac{\alpha^2}{4s^2}. \tag{5.13}$$

Как и раньше, функция B линейна вдоль экстремали и может быть вычислена исходя из известных значений на концах экстремали ℓ_s:

$$B(x) = \frac{x_1-u}{v-u}\,h(s) = \frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{s^2}{\alpha^2}\right)(x_1-u),$$

где функция $s=s(x)$ определяется уравнением (5.13), а функция $u=u(s)$ — уравнениями (5.11).

Найдём теперь огибающую семейства $\{\ell_s\}$. Как и раньше, будем считать, что $x(s) = (x_1(s), x_2(s))$ — точка касания экстремали ℓ_s с огибающей кривой. Проводя такие же вычисления, как и в предыдущем случае, мы получим

$$x_1(s) = \frac{3s}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4s} - \tau - 1, \quad x_2(s) = (\tau+1)^2 - \frac{3s^4+\alpha^4}{2s^3\alpha}(\tau+1) + \frac{3s^4+2s^2\alpha^2+3\alpha^4}{4s^2\alpha^2}.$$

Экстремальные траектории в области Ω_2 вместе с их огибающей показаны на рисунке 4.

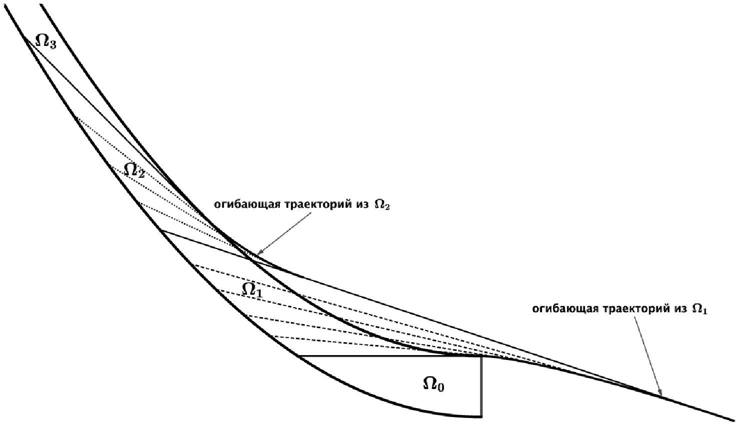

Рис. 4. Экстремальные траектории в областях Ω_1 и Ω_2 и их огибающие.

Мы построили беллмановского кандидата B в областях Ω_1 и Ω_2. В остальной части области Ω_- формула (5.9) уже не оставляет выбора фолиации, которая определяется соотношениями (2.19), и, следовательно, функция B задаётся соотношением (2.18).

Список литературы

[1] Bañuelos R., Osękowski A., *Sharp weak type inequalities for fractional integral operators*, Potential Anal. **47** (2017), no. 1, 103–121.

[2] Bennett C., *Another characterization of* BLO, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), no. 4, 552–556.

[3] Bennett C., DeVore R. A., Ronald A., Sharpley R., *Weak-L^∞ and* BMO, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 3, 601–611.

[4] Coifman R., Rochberg R., *Another characterization of* BMO, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), no. 2, 249–254.

[5] Ivanishvili P., Osipov N., Stolyarov D., Vasyunin V., Zatitskiy P., *Bellman function for extremal problems in* BMO, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 5, 3415–3468.

[6] Melas A., *The Bellman functions of dyadic-like maximal operators and related inequalities*, Adv. Math. **192** (2005), no. 2, 310–340.

[7] Melas A., *Sharp general local estimates for dyadic-like maximal operators and related Bellman functions*, Adv. Math. **220** (2009), no. 2, 367–426.

[8] Melas A., Nikolidakis E., *Dyadic-like maximal operators on integrable functions and Bellman functions related to Kolmogorov's inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 3, 1571–1597.

[9] Melas A., Nikolidakis E., Stavropoulos T., *Sharp local lower L^p-bounds for dyadic-like maximal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 9, 3171–3181.

[10] Назаров А., Трейль С., *Охота на функцию Беллмана: приложения к оценкам сингулярных интегральных операторов и к другим классическим задачам гармонического анализа*, Алгебра и анализ **8** (1996), №5, 32–162.
[11] Osękowski A., *Sharp inequalities for dyadic A_1 weights*, Arch. Math. (Basel) **101** (2013), no. 2, 181–190.
[12] Osękowski A., *Sharp weak-type inequality for fractional integral operators associated with d-dimensional Walsh–Fourier series*, Integral Equations Operator Theory **78** (2014), no. 4, 589–600.
[13] Ou W., *The natural maximal operator on* BMO, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 10, 2919–2921.
[14] Ou W., *Near-symmetry in A^∞ and refined Jones factorization*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 9, 3239–3245.
[15] Slavin L., Vasyunin V., *Sharp L^p estimates on* BMO, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 3, 1051–1110.
[16] Slavin L., Stokolos A., Vasyunin V., *Monge–Ampère equations and Bellman functions: the dyadic maximal operator*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), no. 9–10, 585–588.
[17] Slavin L., Vasyunin V., *Inequalities for* BMO *on α-trees*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2016**, no. 13, 4078–4102.
[18] Vasyunin V., *Cincinnati lectures on Bellman functions*, ed. by Slavin L., 2011, `arXiv:1508.07668`.

Поступило 12 ноября 2018 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки, 27
191023, Санкт-Петербург, Россия

С.-Петербургский государственный университет
Петродворец, Университетский пр., 28
198504, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vasyunin@pdmi.ras.ru

Faculty of Mathematics Informatics and Mechanics
University of Warsaw
Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland
E-mail: ados@mimuw.edu.pl

Университет Цинциннати, США

С.-Петербургский государственный университет
Петродворец, Университетский пр., 28
198504, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: leonid.slavin@uc.edu