0. Język teorii kategorii

Podstawowe pojęcia.

Podstawowe pojęcia teorii kategorii można znaleźć w każdym niemal podręczniku z topologii algebraicznej, na przykład [H], [S], [M]. Podręcznikiem zawierającym wiele interesujących i nietrywialnych przykładów jest [GM]

Następujące pojęcia i przykłady będą używane w dalszej części wykładu:

1) kategoria, funktor,transformacja naturalna funktorów, naturalny izomorfizm funktorów

2) Przykłady:

$\mathcal{S}et$ – kategoria zbiorów,

$\mathcal{A}b \subset \mathcal{G}r$ – kategoria grup i pełna podkategoria grup abelowych

$\mathcal{R}ing_1$ – kategoria pierścieni z 1,

$\mathcal{T}op$, $\mathcal{T}op_*$ – kategoria przestrzeni topologicznych i przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem. Zbiory morfizmów będziemy oznaczać (X, Y) oraz $((X, x_0), (Y, y_0))_*$ odpowiednio. Izomorfizm w $\mathcal{T}op$, czyli homeomorfizm przestrzeni, będziemy oznaczać symbolem $\backsimeq$.

$\mathcal{T}oph$, $\mathcal{T}oph_*$ – kategoria przestrzeni topologicznych i przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem, w których morfizmami są klasy homotopii i klasy punktowanych homotopii.Zbiory morfizmów będziemy oznaczać $[X, Y]$ i $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$ odpowiednio. Izomorfizm w $\mathcal{T}oph$, czyli homotopijną równoważność przestrzeni, będziemy oznaczać symbolem $\approx$. Izomorfizm w $\mathcal{T}oph_*$, czyli homotopijną równoważność przestrzeni względem punktu wyróżnionego, będziemy oznaczać symbolem $\underset{*}{\approx}$.

zbiór częściowo uporządkowany,

grupa jako kategoria, homomorfizm jako funktor,

$\mathcal{C}^o$ – kategoria przeciwna do kategorii $\mathcal{C}$

3)Równoważność kategorii

0.1. Definicja. *Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nazywamy równoważnością kategorii istnieje funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ taki, że $G \circ F \backsimeq id_{\mathcal{C}}$ i $F \circ G \backsimeq id_{\mathcal{D}}$.*

Wiele twierdzeń klasyfikacyjnych w matematyce jest w istocie stwierdzeniem, że pewne dwie kategorie są równoważne.

Z 0.2. Sformułować w tym języku twierdzenie Galois i twierdzenie o klasyfikacji nakryć.

To, czy dany funktor jest równoważnością kategorii pomaga rozstrzygnąć następujące:

♡ Z 0.3. Udowodnić, że funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ jest równoważnością kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy

a) $F : Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ jest bijekcją dla dowolnych $A, B \in ob\,\mathcal{C}$.

b) każdy obiekt $Y \in ob\mathcal{D}$ jest izomorficzny z obiektem $F(A)$ dla pewnego $A \in ob\,\mathcal{C}$.

Funktory reprezentowalne.

0.4. Definicja. *Dla obiektu $X \in \mathcal{C}$ definiujemy funktory:*

$$h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et, \qquad h_X(U) = Mor_{\mathcal{C}}(X, U)$$

$$h^X : \mathcal{C}^o \to \mathcal{S}et, \qquad h^X(U) = Mor_{\mathcal{C}}(U, X)$$

0.5. Definicja. *Funktor $F : \mathcal{C}^o \to \mathcal{S}et$ nazywamy reprezentowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt $X \in \mathcal{C}$ oraz izomorfizm funktorów $h^X \to F$.*

Analogicznie dla funktora kowariantnego.

Dla danego funktora kontrawariantnego morfizmy $F : \mathcal{C}^o \to \mathcal{S}et$ opisuje lemat Yonedy.

♡ Z 0.6. Udowodnić następujący lemat Yonedy i wynikające zeń wnioski:

Lemat Yonedy. *Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ będzie funktorem. Wówczas przyporządkowanie $\tau \mapsto \tau(X)(id_X)$, gdzie $\tau : h^X \to F$ jest naturalną transformacją, definiuje bijekcję zbioru transformacji naturalnych funktora h^X w funktor F i zbioru $F(X)$.*

Wniosek. *Przyporządkowanie $f \rightsquigarrow \tau_f$, $\tau_f(h) = f \circ h$ definiuje bijekcja zbioru $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ w zbiór transformacji naturalnych funktora h^X w funktor h^Y.*

Wniosek. *Jeżeli funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ jest reprezentowalny, to obiekt go reprezentujący jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.*

Z 0.7. Niech $\mathcal{S}et^{\mathcal{C}^o}$ oznacza kategorię, której obiektami są funktory z $\mathcal{C}^o$ w $\mathcal{S}et$, a morfizmami transformacje naturalne. Sprawdzić, że lemat Yonedy mówi, że przyporządkowanie $X \rightsquigarrow h^X$ definiuje funktor, który jest równoważnością kategorii $\mathcal{C}$ z pełna podkategorią $\mathcal{S}et^{\mathcal{C}^o}$ złożoną z funktorów reprezentowalnych.

Analogiczne stwierdzenia są oczywiście prawdziwe dla funktorów kowariantnych.

Podstawowe konstrukcje

Pojęcie funktora reprezentowalnego pozwala przenieść podstawowe konstrukcje z kategorii zbiorów do innych kategorii.

Produkt i produkt włóknisty

Dla obiektów X i Y kategorii $\mathcal{C}$ rozpatrujemy funktor $F(\cdot) = h^X(\cdot) \times h^Y(\cdot)$, gdzie $\times$ oznacza produkt kartezjański zbiorów. Jeżeli funktor F jest reprezentowalny, to obiekt go reprezentujacy nazywamy produktem obiektów X i Y w kategorii $\mathcal{C}$.

Z poprzednich rozważań wynika, że produkt, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

♡ Z 0.8. Pokazać, ze powyższa definicja jest równoważna następującej:

0.9. Definicja. *Produktem obiektów X i Y w kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy obiekt Z wraz z morfizmami $Z \xrightarrow{p_X} X$ i $Z \xrightarrow{p_Y} Y$, który ma następująca własnosc uniwersalnosci: dla dowolnych morfizmów $W \xrightarrow{f} X$ i $W \xrightarrow{g} Y$ istnieje dokładnie jeden morfizm $W \xrightarrow{h} Z$, dla którego $p_X \circ h = f$ i $p_Y \circ h = g$.*

♡ Z 0.10. Zbadać istnienie i opisać produkt dwóch obiektów w $\mathcal{T}op_*$ i $\mathcal{T}oph_*$.

♡ Z 0.11. Uogólnić definicje na produkt dowolnej rodziny obiektów kategorii $\mathcal{C}$.

Definicja produktu ma też inne uogólnienie — **produkt włóknisty**.

0.12. Definicja. *Dane są morfizmy* $X \xrightarrow{p_X} S$ *i* $Y \xrightarrow{p_Y} S$ *w kategorii* $\mathcal{C}$*. Ich produktem włóknistym nazywamy obiekt* Z *wraz z morfizmami* $Z \xrightarrow{q_X} X$ *i* $Z \xrightarrow{q_Y} Y$*, dla których przemienny jest diagram:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "q_Y"'] & X \arrow[d, "p_X"] \\ Y \arrow[r, "p_Y"] & S \end{tikzcd}$$

i który spełnia następujący warunek uniwersalności: dla każdego obiektu W *i morfizmów* $W \xrightarrow{f} X$ *i* $W \xrightarrow{g} Y$ *takich, że* $p_X \circ f = p_Y \circ g$ *istnieje dokładnie jeden morfizm* $W \xrightarrow{h} Z$*, taki że* $q_X \circ h = f$ *i* $q_y \circ h = g$*.*

Produkt włóknisty, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnościa do izomorfizmu. Oznaczamy go symbolem $X \times_S Y$.

♡ Z 0.13. Opisać produkt włóknisty w kategoriach $\mathcal{S}et$ i $\mathcal{T}op$.

Z 0.14. Zbadać istnienie produktu włóknistego w kategorii $\mathcal{T}op_*$.

⋆ Z 0.15. Zbadać istnienie produktu włóknistego w kategorii $\mathcal{T}oph$.

Suma i suma z amalgamacją

Jeżeli w definicji produktu i produktu włóknistego odwrócić strzałki, to dostaniemy definicję pojęć dualnych - sumy i sumy z amalgamacją odpowiednio.

♡ Z 0.16. Sformułować definicję sumy dwóch i sumy dowolnej rodziny obiektów kategorii.

♡ Z 0.17. Sformułować definicję sumy z amalgamacją.

♡ Z 0.18. Opisać sumy i sumy z amalgamacją w $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{T}op_*$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ing_1$.

⋆ Z 0.19. Zbadać istnienie sumy z amalgamacją w $\mathcal{T}oph$.

Granice proste i odwrotne

Niech $\mathcal{I}$ będzie małą kategorią (to znaczy taką, w której obiekty stanowią zbiór).

0.20. Definicja. *Diagramem w kategorii* $\mathcal{C}$ *nazywamy funktor* $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$*.*

Przykłady małych kategorii (nie zaznaczamy morfizmów identycznościowych)

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \dots$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

0.21. Definicja. *Niech $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ będzie diagramem, zaś W obiektem w $\mathcal{C}$. Powiemy, że rodzina morfizmów $\{f_j : W \to F(j)\}_{j\in J}$ jest zgodna jeżeli dla każdego $\alpha_{ij} : i \to j$ morfizmu w J, $F(\alpha_{ij}) \circ f_i = f_j$.*
Granicą odwrotną *diagramu $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ nazywamy obiekt L w $\mathcal{C}$ (oznaczamy go $\varprojlim F$) wraz ze zgodną rodziną morfizmów $p_j : L \to F(j)$, który posiada następującą własność uniwersalności:*

dla każdego obiektu W i zgodnej rodziny $\{f_j : W \to F(j)\}_{j\in J}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $g : W \to L$, dla którego $p_j \circ g = f_j$ dla każdego $j \in J$.

Jeżeli odwrócimy strzałki dostaniemy duale pojęcie granicy prostej systemu.

0.22. Definicja. *Niech $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ będzie diagramem, zaś W obiektem w $\mathcal{C}$. Powiemy, że rodzina morfizmów $\{i_j : F(j) \to W\}_{j\in J}$ jest zgodna jeżeli dla każdego $\alpha_{ij} : i \to j$ morfizmu w J, $F(\alpha_{ij}) \circ i_j = i_i$.*
Granicą prostą *diagramu $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ nazywamy obiekt L w $\mathcal{C}$ (oznaczamy go $\varinjlim F$) wraz ze zgodną rodziną morfizmów $i_j : F(j) \to L$, który posiada następującą własność uniwersalności:*

dla każdego obiektu W i zgodnej rodziny $\{f_j : F(j) \to W\}_{j\in J}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $g : L \to W$, dla którego $g \circ i_j = f_j$ dla każdego $j \in J$.

Oczywiście, tak w przypadku granicy prostej jak i odwrotnej granica, o ile istnieje, to jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnościa do izomorfizmu.

♡ Z 0.23. Sprawdzić, że granica odwrotna (albo inaczej **pull-back**) diagramu

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

to po prostu produkt włóknisty, zaś granica prosta (albo inaczej **push-out**) diagramu

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

to suma z amalgamacją.

♡ Z 0.24. Udowodnić, że w $\mathcal{T}op$ istnieją granice proste i odwrotne. Opisać je.

⋆ Z 0.25. Zbadać istnienie granic prostych i odwrotnych w $\mathcal{T}oph$.

Obiekty grupowe w kategorii

Postępujemy jak w przypadku definicji produktu.

0.26. Definicja. *Powiemy, że X jest obiektem grupowym (kogrupowym) w kategorii $\mathcal{C}$ jeżeli funktor h^X (h_X) przyjmuje wartości w kategorii grup.*

Dokładniej oznacza to, że przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{h^X} & \mathcal{G}r \\ {\scriptstyle h^X} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle Z} \\ & \mathcal{S}et & \end{array}$$

w którym strzałka Z jest funktorem zapominania.

To, czy obiekt X jest obiektem grupowym można wyrazić równoważnie.

♡ Z 0.27. Zakładamy, że w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją produkty $X \times X$, $X \times X \times X$ i obiekt końcowy E. Pokazać, że X jest obiektem grupowym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją morfizmy:

$\mu : X \times X \to X$(działanie grupowe),

${}^{-1} : X \to X$ (branie elementu odwrotnego),

$e : E \to X$ (jedynka),

które spełniają następujące warunki (te warunki proszę wypisać samodzielnie - to nic innego jak aksjomaty grupy napisane przy pomocy przemiennych diagramów).

♡ Z 0.28. Wykazać analogiczne stwierdzenie dla obiektów kogrupowych.

Oba powyższe zadania te są rozwiązane dla kategorii $\mathcal{T}oph_*$ w [F].

Przykładami obiektów grupowych w $\mathcal{T}op_*$ (a więc i w $\mathcal{T}oph_*$) są grupy topologiczne.

0.29. Definicja. *Obiekt grupowy (kogrupowy) w $\mathcal{T}oph_*$ nazywa się, na cześć Heinza Hopfa, H – grupą (H – kogrupą).*
Jeżeli dla przestrzeni (X, x) jest zdefiniowane homotopijnie łączne działanie, które ma homotopijny element neutralny, to taka przestrzeń nazywa się **H-przestrzenią**.

♡ Z 0.30. Pokazać,że jeżeli X jest obiektem kogrupowym, zaś Y grupowym w kategorii $\mathcal{C}$, to struktury grupy wyznaczone na zbiorze $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ przez X i przez Y pokrywają się i ponadto otrzymana grupa jest przemienna. [S]

Pętle i zawieszenie

0.31. Definicja. **Zawieszeniem przestrzeni** X *nazywamy przestrzeń* $\Sigma X = X \times I/ \backsim$, *gdzie* $(x, 0) \backsim (x', 0)$, $(x, 1) \backsim (x', 1)$.

Zawieszeniem zredukowanym przestrzeni z wyróżnionym punktem (X, x_0) *nazywamy przestrzeń* $S(X, x_0) = X \times I/ \backsim$, *gdzie* $(x, 0) \backsim (x', 0)$, $(x, 1) \backsim (x', 1)$, $(x_0, t) \backsim (x_0, t')$ *– punktem wyróżnionym jest* $[(x_0, t)]$.

0.32. Definicja. **Przestrzenią pętli** *na przestrzeni* X *nazywamy przestrzeń* $\Omega X = \{\omega \in (I, X) \colon \omega(0) = \omega(1)\}$, *gdzie* (I, X) *jest przestrzenią ciągłych odwzorowań odcinka w* X *z topologią zwarto-otwartą.*

Przestrzenią pętli na przestrzeni z wyróżnionym punktem (X, x_0) *nazywamy przestrzeń* $\Omega(X, x_0) = \{\omega \in (I, X) \colon \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$ *– punktem wyróżnionym jest pętla stała.*

♡ Z 0.33. Pokazać, że zawieszenie zredukowane sfery $S(S^n, *)$ jest homeomorficzne ze sferą S^{n+1}. Wskazówka: Zauważyć, że obie przestrzenie są jednopunktowymi uzwarceniami R^{n+1}.

♡ Z 0.34. Pokazać, że przestrzeń pętli $\Omega(X, x_0)$ z działaniem składania pętli jest H – grupą. [F]

♡ Z 0.35. Pokazać, że zawieszenie zredukowane $S(X, x_0)$ z kodziałaniem $S(X, x_0) \to S(X, x_0) \vee S(X, x_0)$ polegającym na zgnieceniu do punktu "równika" $X \times 1/2$ i odwrotności ${}^{-1} : S(X, x_0) \to S(X, x_0)$, $[(x,t)]^{-1} = [(x, 1-t)]$ jest H – kogrupą. [F]

♡ Z 0.36. Udowodnić istnienie naturalnych (uściślić, co to oznacza!) bijekcji zbiorów morfizmów:
$(\Sigma X, Y) \backsimeq (X, \Omega Y)$, $[\Sigma X, Y)] \backsimeq [X, \Omega Y]$
$(S(X, x_0), (Y, y_0)) \backsimeq ((X, x_0), \Omega(Y, y_0))$, $[S(X, x_0), (Y, y_0)] \backsimeq [(X, x_0), \Omega(Y, y_0)]$.

Funktory sprzężone

Funktor pętli i funktor zawieszenia są przykładami funktorów sprzężonych.

0.37. Definicja. *Funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ nazywamy sprzężonymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje naturalna bijekcja*

$$Mor_{\mathcal{C}}(\cdot\,, G(\cdot)) \to Mor_{\mathcal{D}}(F(\cdot), \cdot\,).$$

Mówimy, że funktor F jest "lewy sprzężony" do funktora G, a G jest prawy sprzężony do funktora F.

♡ Z 0.38. Pokazać, że funktor sprzężony do danego funktora, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu funktorów.

♡ Z 0.39. Funktorem prawo sprzężonym do funktora $Hom(V, \cdot\,) : \mathcal{V}ect_k \to \mathcal{V}ect_k$ jest funktor ....

♡ Z 0.40. Dla przestrzeni lokalnie zwartej X funktorem prawym sprzężonym do funktora $\cdot \times X : \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$ jest funktor ....

Z 0.41. Pokazać, że jeżeli funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest równoważnościa kategorii, to istnieje funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sprzężony do F zarówno z prawej jak i lewej strony.

1. Korozwłóknienia i rozwłóknienia.

Badając kategorię $\mathcal{T}oph$ i $\mathcal{T}oph_*$ wyróżnimy dwie klasy przekształceń - korozwłóknienia i rozwłóknienia. Są one do siebie w pewnym sensie, którego nie będziemy tu precyzować, dwoiste. Ograniczymy się jedynie do stwierdzenia, że dwoistość ta ma źródło w tym, że funktory $\cdot \times I$ i $(I, \cdot)$ (z topologią zwarto-otwartą) są sprzężone jako funktory $\mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$. Będzie jednak jasne, jakich należy dokonać zmian w diagramie, aby ze stwierdzenia dotyczącego korozwłoknień dostać stwierdzenie dotyczące rozwłóknień i vice-verse'a. Definicje i stwierdzenia poniżej można znaleźć w [M] i [A-G-P].

1.1. Definicja. *Przekształcenie $i : A \to X$ nazywamy korozwłóknieniem, jeżeli dla każdej przestrzeni Y, dowolnego przekształcenia $f : X \to Y$ i dowolnej homotopii $H : A\times I \to Y$, takiej, że $H_{|A\times\{0\}} = f_{|A}$, istnieje homotopia $\bar{H} : X\times I \to Y$, takiej, że $\bar{H}_{|A\times I} = H$ i $\bar{H}_{|X\times\{0\}} = f$. Innymi słowy istnieje $\bar{H}$, dla którego przemienny jest diagram:*

$$
\begin{tikzcd}
A\times\{0\} \arrow[r] \arrow[d] & A\times I \arrow[r, "H"] \arrow[d] & Y \arrow[d, equal] \\
X\times\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X\times I \arrow[r, "\bar{H}"] & Y \arrow[d, equal] \\
X\times\{0\} & \arrow[r, "f"] & Y.
\end{tikzcd}
$$

1.2. Definicja. *Przekształcenie $p : E \to B$ nazywamy rozwłóknieniem, jeżeli dla każdej przestrzeni Y, dowolnej homotopii $H : Y\times I \to B$ i dowolnego przekształcenia $f : Y \to E$ takiego, że $H_{|Y\times\{0\}} = p\circ f$, istnieje homotopia $\bar{H} : Y\times I \to E$, taka, że $p\circ\bar{H} = H$ i $\bar{H}_{|Y\times\{0\}} = f$. Innymi słowy istnieje $\bar{H}$, dla którego przemienny jest diagram:*

$$
\begin{tikzcd}
Y\times\{0\} \arrow[r, "\tilde{h}_0"] \arrow[d, "i_0"] & E \arrow[d, "p"] \\
Y\times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "\bar{H}"] & X
\end{tikzcd}
$$

Jeżeli uwzględnimy, że homotopia $H : Y\times I \to B$, to przekształcenie $H : Y \to B^I$ (oznaczamy je tą samą literą), gdzie $B^I = (I, B)$ z topologią zwarto - otwartą, to przekształcenie $p : E \to B$, jest rozwłóknieniem, jeżeli istnieje $\bar{H} : Y \to E^I$, dla którego przemienny jest diagram:

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d, equal] & & Y \arrow[ll, "f"'] \arrow[d, equal] \\
E & E^I \arrow[l, "p_E"'] \arrow[d] & Y \arrow[l, "H"'] \arrow[d, equal] \\
B \arrow[from=2-1, to=3-1] & B^I \arrow[l, "p_B"'] & Y, \arrow[l, "\bar{H}"']
\end{tikzcd}
$$

gdzie p_B i p_E przyporządkowują drodze jej początek.

Następujące własności są prostą konsekwencją definicji.

1.3. Stwierdzenie. *Jeżeli diagram*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

jest push-outem oraz i korozwłóknieniem, to $j : Y \to Z$ *jest także korozwłóknieniem.*

1.4. Definicja. *Cylindrem* Z_f *przekształcenia* $f : X \to Y$ *nazywamy push out diagramu*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z_f. \end{array}$$

Korzystając z uniwersalnej własności push-outu nietrudno pokazać, że:

1.5. Stwierdzenie. *Przekształcenie* $i : A \to X$ *jest korozwłóknieniem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje retrakcja* $r : X \times I \to Z_i$*, dla której oczywisty diagram jest przemienny.*

Z powyższego stwierdzenia i stwierdzenia 1.3 dostajemy łatwo:

1.6. Stwierdzenie. *Dla dowolnego przekształcenia* $f : X \to Y$ *włożenie* $i_f : X \to Z_f$, $i_1(x) = [(x, 1)]$ *jest korozwłóknieniem.*

Ponadto, jeżeli przez $\pi : Z_f \to Y$ *oznaczymy oczywistą retrakcję, to* $f = \pi \circ i_f$*, gdzie* π *jest homotopijną równoważnością a* i_1 *korozwłóknieniem.*

Analogiczne stwierdzenia dla rozwłóknień wyglądają następująco:

1.7. Stwierdzenie. *Jeżeli diagram*

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

jest pull-backiem oraz p rozwłóknieniem, to $p' : E' \to X$ *jest także rozwłóknieniem.*

1.8. Definicja. *Kocylindrem przekształcenia* $f : X \to Y$ *nazywamy przestrzeń* N_f *będącą pull-backiem diagramu:*

$$\begin{array}{ccc} N_f & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

1.9. Stwierdzenie. *Przekształcenie $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $s : N_p \to E^I$, zwana funkcją podnoszącą drogi, dla której oczywisty diagram jest przemienny.*

1.10. Stwierdzenie. *Dla dowolnego przekształcenia $f : X \to Y$, które indukuje epimorfizm składowych łukowych, przekształcenie $p_f : N_f \to Y$, $p_f((x, \omega)) = \omega(1)$ jest rozwłóknieniem.*

Ponadto, jeżeli przez $s : X \to N_f$ oznaczymy przekształcenie $s(x) = (x, \omega_{f(x)})$, gdzie $\omega_{f(x)}$ oznacza funkcję stałą w punkcie $f(x)$, to mamy $f = p_f \circ s$, gdzie s jest homotopijną równoważnością, zaś p_f rozwłóknieniem.

Dowód tego stwierdzenia jest prosty, odnotujmy tylko, że homotopijną odwrotnością do s jest przekształcenie $t : N_f \to X$, $t((x, \omega)) = x$

Obie powyższe konstrukcje podają "przepis" na zastąpienie dowolnego przekształcenia "z dokładnością do homotopijnej równoważności" przez korozwłóknienie ew. rozwłóknienie. Powstaje naturalne pytanie o jednoznaczność tej konstrukcji. W szczególności co dostaniemy, jeżeli dane przekształcenie już jest korozwłóknieniem, rozwłóknieniem? Do pytania tego powrócimy, a na razie zauważmy ciekawą i ważną własność obu konstrukcji. Tym razem zaczniemy od rozwłóknienia.

Załóżmy, że mamy do czynienia z przestrzeniami z wyróżnionym punktem i $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Przestrzeń N_f ma punkt wyróżniony $(x_0, \omega_{f(x_0)})$ i $s : (X, x_0) \to (N_f, (x_0, \omega_{f(x_0)}))$ jest homotopijną równoważnościa przestrzeni z wyróżnionym punktem. Niech $p_f : (N_f, (x_0, \omega_{f(x_0)})) \to (Y, y_0)$ i niech $F_f = p_f^{-1}(y_0) = \{(x, \omega) : \omega(0) = f(x) \text{ i } \omega(1) = y_0\}$ - przestrzeń ta nazywa się **homotopijnym włóknem** nad punktem y_0 (jak przekonamy się później typ homotopijny tej przestrzeni nie zależy od wyboru punktu ze składowej łukowej). Niech $i_1 : F_f \to X$.

Nasuwa się od razu naturalne pytanie:

♡ Z 1.11. Rozstrzygnąć, czy typ homotopijny homotopijnego włókna zależy od klasy homotopii przekształcenia f.

1.12. Stwierdzenie. *Dla każdej przestrzeni (W, w_0) dokładny jest ciąg zbiorów z wyróżnionym punktem:*

$$[(W, w_0), (F_f, (x_0, \omega_{f(x_0)}))]_* \to [(W, w_0), (N_f, (x_0, \omega_{f(x_0)}))]_* \to [(W, w_0), (Y, y_0)]_*,$$

a zatem także ciąg:

$$[(W, w_0), (F_f, (x_0, \omega_{f(x_0)}))]_* \xrightarrow{i_{1*}} [(W, w_0), (X, (x_0)]_* \xrightarrow{f_*} [(W, w_0), (Y, y_0)]_*,$$

Dowód sprowadza się do pokazania następującej własności homotopijnego włókna, która jest "homotopijnym odpowiednikiem" pojęcia jądra homomorfizmu w algebrze.

1.13. Lemat. *Dla dowolnej przestrzeni (W, w_0) i przekształcenia $g : (W, w_0) \to (X, x_0)$ takiego, że $f \circ g$ jest homotopijne z przekształceniem stałym względem punktu wyróżnionego, istnieje przekształcenie $h : (W, w_0) \to (F_f, (x_0, \omega_{f(x_0)}))$ i $p_f \circ h \simeq_* g$.*

Przekształcenie h można po prostu wypisać wzorem. Jeżeli F jest homotopią z założenia, to $h(w) = (g(w), F(fg(w), \cdot))$. Mamy $p_f \circ h = g$.

Konstrukcję brania homotopijnego włókna można iterować, biorąc w kolejnym kroku homotopijne włókno przekształcenia $p_f : (F_f, (x_0, \omega_{f(x_0)})) \to X$ itd. Okazuje się, że naturalne włożenie $\Omega Y \to F_f$ jest homotopijną równoważnością a iterując procedurę dalej dostajemy ciąg dokładny,który poczynając od trzeciego miejsca jest już ciągiem grup i homomorfizmów!!

♡ Z 1.14. Pokazać, że $\Omega Y \to F_f$ jest homotopijną równoważnością.

♡ Z 1.15. Niech $i_1 : F_f \to X$, zaś $i_2 : F_{i_1} \to F_f$. Pokazać, że przemienny jest następujący diagram, w którym jak wiemy z poprzedniego zadania, pionowe strzałki sa homotopijnymi równoważnościami:

$$\begin{array}{ccc} F_{i_1} & \xrightarrow{i_2} & F_f \\ \approx\uparrow & & \uparrow\approx \\ \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y. \end{array}$$

1.16. Twierdzenie. *Dla każdej przestrzeni (W, w_0) dokładny jest ciąg (dla uproszczenia w zapisie pomijamy punkty wyróżnione):*

$$\ldots [W, \Omega F_f]_* \to [W, \Omega X]_* \xrightarrow{\Omega f_*} [W, \Omega Y]_* \to [W, F_f]_* \xrightarrow{p_{f*}} [W, X]_* \xrightarrow{f_*} [W, Y]_*,$$

♡ Z 1.17. Dowód powyższego stwierdzenia wymaga wykazania, że $\Omega F_f \overset{\approx}{\star} \Omega F_{\Omega f} f$. Udowodnić to stwierdzenie.

Przejdźmy do korozwłóknień - dualna konstrukcja będzie odpowiednikiem kojądra czyli przestrzeni ilorazowej dziedziny przez obraz. Definicje są oczywiste i dostajemy je przez "odwrócenie strzałek".

1.18. Definicja. **Homotopijnym kowłóknem** *lub* **stożkiem** *przekształcenia $f : X \to Y$ nazywamy przestrzeń $C_f = Z_f / X \times \{1\}$. W przypadku przekształceń zachowujących punkt wyróżniony rozpatrujemy zredukowany stożek $C_f = Z_f / X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$.*

Niech $i_f : Y \to C_f$ oznacza naturalne włożenie.

♡ Z 1.19. Rozstrzygnąć, czy typ homotopijny homotopijnego ko-włókna zależy od klasy homotopii przekształcenia f.

♡ Z 1.20. Sformułować i udowodnić odpowiedniki stwierdzeń 1.11 i 1.12

Odpowiednikiem Twierdzenia 1.13 będzie

1.21. Twierdzenie. *Dla każdej przestrzeni (W, w_0) dokładny jest ciąg (dla uproszczenia w zapisie pomijamy punkty wyróżnione):*

$$\ldots [C_{Sf}, W]_* \to [SX, W]_* \xrightarrow{Sf^*} [SY, W]_* \to [C_f, W]_* \xrightarrow{i_{f*}} [X, W]_* \xrightarrow{f_*} [Y, W]_*,$$

Podobnie jak poprzednio należy rozwiązać

♡ Z 1.22. Pokazać, że $C_{Sf} \overset{\approx}{\star} SC_f$.

2. Własności korozwłóknień

♡ Z 2.1. Pokazać, że jeżeli $i : A \to X$ jest korozwłóknieniem, to i jest włożeniem homeomorficznym. Pokazać, że jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa, to $i(A)$ jest domkniętym podzbiorem X.

Uwaga: Jeżeli włożenie $A \subseteq X$ jest korozwłóknieniem, to mówimy, że $A \subseteq X$ jest zamkniętą parą Borsuka. Jeżeli dodatkowo X jest przestrzenią Hausdorffa, to A jest podzbiorem domkniętym - mówimy wówczas o zamkniętej parze Borsuka.

To, czy włożenie jest korozwłóknieniem jest własnością "położenia" podzbioru, co wynika z następującego zadania:

♡ Z 2.2. Udowodnić, że dla domkniętego podzbioru $i\colon A \hookrightarrow X$ następujące warunki są równoważne:

a) istnieje funkcja $\varphi : X \to [0,1]$, taka że $\varphi^{-1}(1) = A$ i A jest silnym retraktem deformacyjnym otoczenia otwartego $U = \varphi^{-1}((0,1])$.
b) $X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$ jest retraktem deformacyjnym
c) $X \times \{0\} \cup A \times I$ jest retraktem $X \times I$
d) $i\colon A \hookrightarrow X$jest korozwłóknieniem.

(Przypomnijmy, że retrakcja $r : U \to A$ nazywa się **silną retrakcją deformacyjną**, jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_U względem A. Podzbiór $A \subseteq U$ nazywa się **silnym retraktem deformacyjnym** jeśli istnieje silna retrakcja deformacyjna $r : U \to A$. Przypomnijmy także, że założenie istnienia funkcji jak w punkcie a) nie jest zbyt restrykcyjne - jeżeli X jest przestrzenią metryczną, to funkcja φ o żądanych własnościach istnieje dla dowolnego domkniętego podzbioru A i jego dowolnego otwartego otoczenia U.)

Warunek, b) z poprzedniego zadania można wzmocnić.

2.3. Lemat. *Jeżeli $A \subseteq X$ jest zamkniętą parą Borsuka, to $X \times \{0\} \cup A \times I \subseteq X \times I$ jest silnym retraktem deformacyjnym.*

Dowód. Niech $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, $r(x,t) = (r_1(x,t), r_2(x,t))$ będzie retrakcją. Zdefiniujmy $G : X \times I \times I \to X \times I$ wzorem:

$$G((x,t),s) = (r_1(x,(1-s)t), (1-s)r_2(x,t) + ts).$$

Łatwo widać, że G jest homotopią pomiędzy id a retrakcją r i ponadto dla $x \in A$ i dowolnego $s \in I$, $G((x,t),s) = (x,(1-s)t + ts) = (x,t)$. □

♡ Z 2.4. Pokazać, że jeżeli $i : A \hookrightarrow X$ jest korozwłóknieniem i A jest przestrzenią ściągalną, to $X/A \sim X$.

♡ Z 2.5. Pokazać, że jeżeli $i : A \hookrightarrow X$ jest korozwłóknieniem, to $C_i \approx X/A$. (co umacnia analogię stożka przekształcenia i kojądra w algebrze).

Powyższe zadanie jest uogólnieniem przydatnego bardzo twierdzenia:

2.6. Twierdzenie. *Jeżeli $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka oraz przekształcenia $f_0, f_1 : A \to Y$ są homotopijne, to przestrzenie $X \cup_{f_0} Y$ oraz $X \cup_{f_1} Y$, są homotopijnie równoważne względem przestrzeni Y.*

Dowód. Niech $F : A \times I \to Y$ będzie homotopia między f_0 i f_1. Wykażemy, że oba włożenia $X \cup_{f_k} Y \subseteq (X \times I) \cup_F Y$ dla $k = 0, 1$ są retraktami deformacyjnymi. Ze względu na symetrię wystarczy ograniczyć się do $k = 0$. Zauważmy oczywisty homeomorfizm, wynikający z definicji doklejania:

$$X \cup_{f_0} Y = (X \times \{0\} \cup A \times I) \cup_F Y \subset (X \times I) \cup_F Y.$$

Niech $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ będzie silną retrakcją deformacyjną zaś G homotopią definiującą silną deformację. Retrakcję r rozszerzamy do retrakcji $r_0 : (X \times I) \cup_F Y \to X \cup_{f_0} Y$ kładąc identyczność na przestrzeni Y. Ponieważ homotopia G jest stała na $X \times \{0\} \cup A \times I$, to rozszerza się w oczywisty sposób do homotopii $\bar{G}$ kładąc identyczność na przestrzeni Y.

□

2.7. Twierdzenie. *Jeżeli $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka oraz przekształcenia $f_0, f_1 : A \to Y$ są homotopijne, to przestrzenie $X \cup_{f_0} Y$ oraz $X \cup_{f_1} Y$, są homotopijnie równoważne względem przestrzeni Y.*

2.8. Definicja. *Mówimy, że przestrzeń z wyróżnionym punktem (X, x_0) jest* **dobrze punktowana***, jeżeli włożenie $x_0 \hookrightarrow X$ jest korozwłóknieniem.*

Zauważmy, że z punktu widzenia teorii homotopii, to nie jest ograniczający warunek. Dla dowolnej pary (X, x), niech $X' = X \cup_i I$, gdzie $i : \{x\} \hookrightarrow I$, $i(x) = 0$- przestrzeń X jest silnym retraktem deformacyjnym przestrzeni X' i para $(X', [1])$ jest dobrze punktowana. (Uwaga: Pary (X, x) i $(X', [1])$ nie są izomorficzne w $\mathcal{T}oph_*$!)

Z 2.9. Niech (X, x_0), (Y, y_0) będą łukowo spójnymi przestrzeniami z wyróżnionym punktem i niech X będzie dobrze punktowana. Pokazać, że: W

a) Każde przekształcenie $f : X \to Y$ jest homotopijne z przekształceniem $g : X \to Y$, takim że $g(x_0) = y_0$.
b) podać przykład przestrzeni i dwóch homotopijnych przekształceń $f, g : X \to Y$, takich że $g(x_0) = f(x_0) = y_0$, ale nie istnieje homotopia zachowująca punkt bazowy.
c) Pokazać, że jeżeli Y jest także dobrze punktowana i $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ jest homotopijną równoważnością, to f jest homotopijną równoważnością z zachowaniem punktu bazowego. [P]
   Wskazówka do punktu c): Udowodnić, że jeżeli $h : X \to X$ i $h \sim id_X$, to istnieje $h' : X \to X$, takie że $h' \circ h \underset{*}{\sim} id_X$.

Z 2.10. Pokazać, że jeżeli $(X, *)$ z punktem wyróżnionym jest dobrze punktowana to $\Sigma X \longrightarrow S(X, *)$ jest homotopijną równoważnością.

Z 2.11. Pokazać,że jeżeli (X, x_0) i (X, x_1) są dobrze punktowane, to istnieje homotopijna równoważność $f : (X, x_0) \to (X, x_1)$.

♡ Z 2.12. Pokazać, że jeżeli (X, x_0) jest dobrze punktowaną H - przestrzenią z działaniem $\mu : X \times X \to X$, to istnieje działanie μ', $\mu' \sim \mu$ i $\mu'(x, x_0) = \mu'(x_0, x) = x$ dla dowolnego $x \in X$. (to znaczy każde H-działanie z homotopijną jedynką możemy z dokładnością do homotopii zastąpić przez działanie, które ma ścisłą jedynkę).

Inne zadania dotyczące korozwłóknień:

Z 2.13. Pokazać, że złożenie korozwłóknień jest korozwłóknieniem.

Z 2.14. Wykazać, że włożenie punktu w dowolny podzbiór otwarty $\mathbb{R}^n$ jest parą Borsuka.

Z 2.15. Udowodnić, że jeżeli $A \subseteq X$ jest korozwłóknieniem i istnieje $\varphi : X \to A$ takie, że $\varphi_{|A} \sim id_A$, to istnieje retrakcja $r : X \to A$, $r \sim \varphi$.

⋆ Z 2.16. Udowodnić że, jeżeli $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka i $A \subseteq X$ jest retraktem deformacyjnym, to $A \subseteq X$ jest silnym retraktem deformacyjnym. (Wskazówka:posłużyć się następującym lematem(Postnikow [1], str. 95-96):

Lemat. *Jeżeli $A \subseteq X$ jest zamkniętą parą Borsuka, to $X \times \{0\} \cup A \times I \cup X \times \{1\} \subseteq X \times I$ jest także parą Borsuka.)*

♡ Z 2.17. Udowodnić, że jeżeli $A \subseteq X$ jest parą Borsuka i włożenie $i : A \hookrightarrow X$ jest homotopijną równoważnością, to A jest retraktem deformacyjnym X.

Z 2.18. Pokazać, że przekształcenie $f : X \to Y$ jest homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $X = X \times \{1\} \subset Cyl(f)$ jest retraktem deformacyjnym.

Z 2.19. Niech $A \subseteq X$ będzie korozwłóknieniem. Udowodnić, że jeżeli X jest przestrzenią ściągalną to X/A jest homotopijnie równoważne z zawieszeniem ΣA.

Z 2.20. Uogólnić poprzednie zadanie znajdując stożek przekształcenia $f : Y \to X$, gdzie X jest przestrzenią ściągalną.

Z 2.21. Pokazać, że: $S^1 \times S^1/S^1 \times \{s_0\} \approx S^2 \vee S^1$ oraz $S^1 \times D^2/S^1 \times S^1 \approx S^3 \vee S^2$

Z 2.22. Wykazać, że $S^n/S^k \approx S^n \vee S^{k+1}$.

♡ Z 2.23. Rozpatrzmy diagram

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \to \dots$$

w $\mathcal{T}op$. **Teleskopem** tego diagramu nazywamy przestrzeń $\mathrm{Tel}(X_i, f_i) = (\coprod X_i \times I)/\backsim$, gdzie $(x_i, 1) \backsim (f_i(x_i), 0)$. Pokazać, że $\mathrm{Tel}(X_i, f_i)$ jest homotopijnie równoważny z $\varinjlim X_i$ (granicą prostą w $\mathcal{T}op$). Czy jeśli w diagramie zastąpić przekształcenia f_i, przekształceniami g_i, takimi, że $g_i \sim f_i$, to $\mathrm{Tel}(X_i, f_i) \approx \mathrm{Tel}(X_i, g_i)$?

3. Własności rozwłóknień.

Rozwłóknienia są niezwykle ważną klasą przekształceń, choćby dlatego, że pojawiają się w naturalny sposób w wielu miejscach w matematyce. Jeżeli $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem, to przestrzeń $F_b = p{-}1(b)$ nazywamy **włóknem** nad punktem b.

Zacznijmy od znanych przykładów:

1. Rozwłóknienie produktowe: $p_B : B \times F \to B$. Na rozwłóknienie można patrzeć, jak na ciągłą rodzinę przestrzeni parametryzowaną przez punkty bazy - przestrzeni B. Produkt jest najprostszą możliwą taką parametryzacją.
2. Nakrycie jest rozwłóknieniem
3. Niech $i : \{b_0\} \hookrightarrow B$. Wówczas $N_i = \{\omega : I \to B : \omega(0) = b_0\}$ jest przestrzenią dróg w B o początku w punkcie b_0, zaś odwzorowanie przypisujące drodze jej koniec - rozwłóknieniem. Przestrzeń tego rozwłóknienia jest ściągalna, a włóknem nad punktem b_0 jest przestrzeń pętli $\Omega(B, b_0)$.

Nakrycia i produkty mają wspólne naturalne uogólnienie:

3.1. Definicja. *Przekształcenie $p : E \to B$ nazywa się* **wiązką trywialną**, *jeżeli istnieje przestrzeń F oraz homeomorfizm $f : E \to B \times F$, dla którego przemienny jest diagram:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \times F \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

3.2. Definicja. *Przekształcenie $p : E \to B$ nazywa się* **wiązką lokalnie trywialną**, *jeżeli dla każdego punktu $b \in B$ istnieje otoczenie otwarte $U_b \subseteq B$ oraz homeomorfizm $f_b : p^{-1}(U_b) \to U_b \times p^{-1}(b)$, dla którego przemienny jest diagram:*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[rr, "f_b"] \arrow[dr] & & U_b \times p^{-1}(b) \arrow[dl] \\ & U_b & \end{tikzcd}$$

Dalej o wiązce lokalnie trywialnej będziemy mówić krótko - wiązka.

3.3. Uwaga. Jeżeli przekształcenie $p : E \to B$ jest wiązką nad spójną przestrzenią B, to $p(E) = B$ i włókna nad dowolnymi dwoma punktami przestrzeni B są homeomorficzne, a zatem homeomorficzne z pewną ustaloną przestrzenią F, możemy więc mówić o **włóknie wiązki**.

Należy wykazać, że wiązka jest rozwłóknieniem, czyli ma własność podnoszenia homotopii. Można uczynić to bezpośrednio ([F]), lub odwołać się do ogólniejszego, skądinąd interesującego rezultatu, mówiącego, że jeżeli przekształcenie jest rozwłóknieniem lokalnie, to jest nim globalnie.

3.4. Twierdzenie Hurewicza. *Niech $p : E \to B$ będzie przekształceniem i niech $\{U_i\}_{i\in I}$ będzie numerowalnym pokryciem przestrzeni B. Jeżeli dla każdego $i \in I$ obcięcie $p_| : p^{-1}(U_i) \to U_i$ jest rozwłóknieniem, to $p : E \to B$ jest także rozwłóknieniem.*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [S]. Polega on na "sklejeniu " funkcji podnoszących drogi dla zbiorów U_i do funkcji podnoszącej drogi dla całej przestrzeni B i warunek numerowalności pokrycia jest warunkiem technicznym, który takie sklejenie umożliwia. W każde pokrycie otwarte przestrzeni parazwartej można wpisać pokrycie numerowalne, więc założenia twierdzenia Hurewicza są często spełnione.

3.5. Definicja. *Pokrycie $\{U_i\}_{i\in I}$ przestrzeni X nazywa się numerowalne wtedy i tylko wtedy, gdy jest lokalnie skończone (każdy punkt przestrzeni X posiada otoczenie otwarte mające punkty wspólne tylko ze skończoną liczbą zbiorów pokrycia) oraz istnieje zbiór funkcji ciągłych $\{\varphi_i : X \to [0,1]\}_{i\in I}$, taki że $U_i = \varphi^{-1}(0,1]$ dla każdego $i \in I$.*

Jeżeli $\{\varphi_i : X \to [0,1]\}_{i\in I}$ jest rozkładem jedynki, to $\{U_i = \varphi^{-1}(0,1]\}_{i\in I}$ jest pokryciem numerowalnym. Wynika z tego, że w każde pokrycie otwarte przestrzeni parazwartej można wpisać pokrycie numerowalne, zatem założenia twierdzenia Hurewicza nie są zbyt restrykcyjne.

Przytoczmy jeszcze dwa ważne przykłady, w których przekształcenie jest wiązką:

♡ Z 3.6. Pokazać, że jeżeli M i N są gładkimi rozmaitościami, a $p : M \to N$ właściwą (tj. przeciwobrazy zbiorów zwartych są zwarte) gładką surjekcją (tj. dla każdego punktu pochodna jest epimorfizmem), to p jest wiązką lokalnie trywialną.

♡ Z 3.7. Jeżeli zwarta grupa G działa w sposób wolny i gładki na gładkiej rozmaitości M, to rzutowanie na przestrzeń orbit $p : M \to M/G$ jest wiązka z włóknem G.

♡ Z 3.8. Rozpatrzmy działanie S^1 na S^{2n-1} zadane wzorem:

$$z(z_1, \dots, z_n) = (zz_1, \dots, zz_n).$$

Definicja. *Zespoloną przestrzenią rzutową nazywamy przestrzeń $\mathbb{C}P^n = S^{2n-1}/S^1$*

Udowodnić, że $\mathbb{C}P^2$ jest homeomorficzne ze sferą S^2. Znaleźć trywializację wiązki $S^3 \to \mathbb{C}P^2 \simeq S^2$ (nazywa się ją wiązką Hopfa).

Włókna rozwłóknienia.

Niech $p : E \to B$ będzie rozwłóknieniem nad łukowo spójną bazą B. Pokażemy, że każde dwa włókna są homotopijnie równoważne. Niech $x, y \in B$ będą punktami B i niech $\omega : I \to B$ drogą, dla której $\omega(0) = x$ i $\omega(1) = y$. Rozpatrzmy homotopię $H_\omega : F_x \times I \xrightarrow{\pi_I} I \xrightarrow{\omega} B$ i jej podniesienie $\tilde{H}_\omega : F_x \times I \to E$ rozpoczynające się od włożenia $i_x : F_x \to E$

$$\begin{tikzcd} F_x \times \{0\} \arrow[r, "i_x"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ F_x \times I \arrow[r, "H_\omega"] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & B. \end{tikzcd}$$

Dla każdego $t \in I$ homotopia $\tilde{H}_\omega(\cdot, t) : F_x \to F_{\omega(t)}$ i mówimy, że jest ona przeniesieniem włókna nad x po drodze ω. Niech $\tilde{H}_\omega(\cdot, 1) = \Phi_\omega : F_x \to F_y$.

Następujące własności przekształcenia Φ_ω łatwo wynikaja z własności podnoszenia homotopii:

a) Klasa homotopii przekształcenia Φ_ω nie zależy od wyboru podniesienia i nie zależy od klasy homotopii względem końców drogi ω. Możemy więc pisać $\Phi_{[\omega]}$.

b) $\Phi_{[\tau]} \circ \Phi_{[\omega]} \sim \Phi_{[\omega\circ\tau]}$.

Mamy więc:

3.9. Stwierdzenie. *Przekształcenie $\Phi_{[\omega]} : F_{\omega(0)} \to F_{\omega(1)}$ jest homotopijną równoważnością.*

Rozwłóknienia nad ustaloną bazą

3.10. Definicja. *Niech $p : E \to B$ i $p' : E' \to B$ będą rozwłóknieniami.*
Przekształcenie $f : E \to E'$ nazywamy **włóknistym** *lub przekształceniem* **nad** *B jeżeli $p' \circ f = p$, czyli przemienny jest diagram:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Przekształcenia włókniste $f, g : E \to E'$ nazywamy **włókniście homotopijnymi** *lub homotopijnymi nad B, jeżeli istnieje homotopia, która dla każdego $t \in I$ jest przekształceniem włóknistym. Piszemy wówczas $f \underset{B}{\sim} g$.*

Przekształcenia włókniste $f : E \to E'$ nazywamy **włóknistą homotopijną równoważnością** *lub homotopijną równoważnością nad B, jeżeli istnieje przekształcenie włókniste $g : E' \to E'$, dla którego $g \circ f \underset{B}{\sim} id_E$ i $f \circ g \underset{B}{\sim} id_{E'}$. Piszemy wówczas $f \underset{B}{\approx} g$.*

W języku kategoryjnym możemy mówić, że rozpatrujemy kategorię $\mathcal{F}ib_B$ rozwłóknień nad przestrzenią B, w której morfizmami są klasy włóknistej homotopii a izomorfizmami włókniste homotopijne równoiważności.

Z własności podnoszenia homotopii wynika łatwo następujący przydatny fakt:

3.11. Stwierdzenie. *Niech $p : E \to B$ i $p' : E' \to B$ będą rozwłóknieniami. Jeżeli $f : E \to E'$ jest takim przekształceniem, że $p' \circ f \sim p$, to istnieje przekształcenie $f' \backsim f$ i $f' : E \to E'$ jest już przekształceniem włóknistym.*

Dowód jest oczywisty - należy podniesc homotopię od $p' \circ f$ do p o początku f.

Rozpatrzmy problem jednoznaczności podniesienia homotopii. Zachodzi twierdzenie:

3.12. Twierdzenie. *Niech $p : E \to B$ będzie rozwłóknieniem. Niech $\tilde{H}, \tilde{F} : X \times I \to E$ będą homotopiami takimi, że:*

a) Homotopie $p \circ \tilde{H}$ i $p \circ \tilde{F}$ są homotopijne przy pomocy $G : (X \times I) \times I \to B$,

b) przekształcenia $\tilde{H}_{|X\times\{0\}}$ oraz $\tilde{F}_{|X\times\{0\}}$ są homotopijne przy pomocy $\tilde{G}_0 : X \times \{0\} \times I \to E$,

c) $p \circ \tilde{G}_0 = G_{|X\times\{0\}\times I}$.

Wówczas istnieje homotopia $\tilde{G} : (X \times I) \times I \to E$, taka, że $\tilde{G}_{|X\times\{0\}\times I} = \tilde{G}_0$ i $p \circ \tilde{G} = G$.

3.13. Wniosek. *Jeżeli $\tilde{H}, \tilde{F} : X \times I \to E$ są podniesieniami tej samej homotopii H, to $\tilde{H} \underset{B}{\sim} \tilde{F}$ są włókniście homotopijne.*

Dowód twierdzenia jest bardzo łatwy - Szukamy podniesienia $\tilde{G}$ przekształcenia G, mając określone $\tilde{G}$ na $X \times (\{0\} \times I \cup I \times \{0\} \cup I \times \{1\})$. Wystarczy zauważyć,że istnieje homeomorfizm $(I \times I, \{0\} \times I \cup I \times \{0\} \cup I \times \{1\}) \simeq (I \times I, I \times \{0\})$ i skorzystać z istnienia podniesienia.

Zróbmy dygresję odnoszącą się jednoznaczności rozszerzenia homotopii w definicji korozwłóknienia.

♡ Z 3.14. Sformułować i udowodnić dla korozwłóknień rezultat analogiczny do 3.11.

Powróćmy do pojęcia włóknistej homotopii i włóknistej homotopijnej równoważności. Włóknista homotopia jest o wiele silniejszym warunkiem od zwykłej homotopii i nietrudno jest rozwiązać zadanie:

Z 3.15. Podać przykład dwóch przekształceń włóknistych, które są homotopijne, ale nie są włókniście homotopijne.

Tym bardziej zaskakujące jest twierdzenie

3.16. Twierdzenie. *Niech $p : E \to B$ i $p' : E' \to B$ będą rozwłóknieniami. Jeżeli $f : E \to E'$ jest przekształceniem włóknistym i homotopijną równoważnością, to f jest włóknistą homotopijną równoważnością.*

[M], [A-G-P]

Dowód: Korzystając ze stwierdzenia 3.10 możemy założyć, że homotopijna odwrotność do f jest przekształceniem włóknistym. Pozostaje zatroszczyć się o to by homotopie z identycznościami były włókniste. Kluczowym krokiem jest następujący lemat:

3.17. Lemat. *Niech $k : E' \to E'$ będzie przekształceniem włóknistym rozwłóknienia $E' \to B$ i niech $k \sim id_{E'}$. Wówczas istnieje $l : E' \to E'$ przekształcenie włókniste, takie że $k \circ l \underset{B}{\sim} id_{E'}$.*

Zauważmy, że powyższe stwierdzenie jest analogiczne do zadania 2.9 c) a lemat odpowiada wskazówce.

Powyższe twierdzenie pozwala na rozstrzygnięcie pytania o homotopijną jednoznaczność przedstawienia dowolnego przekształcenia w postaci złożenia homotopijnej równoważności i rozwłóknienia.

3.18. Stwierdzenie. *Niech $f : X \to Y$ będzie dowolnym przekształceniem i niech w poniższym diagramie przekształcenia s i t będą homotopijnymi równoważnościami, zaś przekształcenia p i p' rozwłóknieniami.*

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "p"'] & Y \\
X \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] \\
E' \arrow[r, "p'"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

Wówczas rozwłóknienia $p : E \to Y$ i $p' : E' \to Y$ są włókniście homotopijnie równoważne.

Dowód tego stwierdzenia wobec stwierdzeń 3.10 i 3.15 jest oczywisty. Wynika, z niego, że dobrze określony jest typ homotopijny homotopijnego włókna dowolnego przekształcenia.

Rozwłóknienia indukowane.

Niech $f : X \to B$ będzie przekształceniem. Konstrukcja rozwłóknienia indukowanego definiuje funktor $f! : Fib_B \to Fib_X$.

Z 3.19. Sprawdzić, że istotnie jest to funktor.

Zachodzi twierdzenie:

3.20. Twierdzenie. *Niech $E \to B$ będzie rozwłóknieniem. Jeżeli odwzorowania $f, g : X \to B$ są homotopijne, to rozwłóknienia indukowane przez f i g są włókniście homotopijnie równoważne.*

Dowód twierdzenia (szkic): Wystarczy pokazać, że jeżeli $E \to X \times I$ jest rozwłóknieniem, to $E_0 \to X$ i $E_1 \to X$ są włókniście homotopijnie równoważne, gdzie $E_s \to X$ jest rozwłóknieniem indukowanym przez włożenie $i_s : X = X \times \{s\} \hookrightarrow X \times I$. Potrzebujemy przede wszystkim odwzorowań między tymi rozwłóknieniami - kandydatów na włókniste homotopijne równoważności.

Rozpatrzmy $X \times I \to X \times \{s\}$. Podniesienie tego odwzorowania dałoby nam

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_s \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & X \times \{s\}. \end{array}$$

Możemy je uzyskać podnosząc homotopię $(X \times I) \times I \to X \times I$, $((x, r), t) \to (x, r(1-t) + ts)$. Jeżeli rozpatrzymy te homotopie jednocześnie dla wszystkich s, to dostaniemy homotopię $h : (X \times I) \times I \times I \to X \times I$, $h((x, r), s, t) = (x, r(1-t) + ts)$. Rozważamy podniesienie:

$$\begin{array}{ccc} E \times I \times \{0\} & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & E \\ \big\downarrow & {\scriptstyle H}\nearrow & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ E \times I \times I & \xrightarrow{h \circ (p \times id)} & X \times I. \end{array}$$

Z homotopii H można odczytać zarówno odwzorowania $E_0 \leftrightarrows E_1$ jak i włókniste homotopie obu złożeń z odpowiednimi identycznościami.

Nasuwa się naturalne, choć zapewne niezbyt istotne pytanie.

Z 3.21. Czy jeśli $f, g : X \to B$ są homotopijne, to funktory $f!, g! : Fib_B \to Fib_X$ są naturalnie równoważne? (trzeba sprawdzić zgodność włóknistych homotopiijnych równoważności z klasami włóknistej homotopii morfizmów)

Na koniec zwróćmy uwagę, że struktura wiązki lokalnie trywialnej jest dużo "sztywniejsza" :

Wiązki lokalnie trywialne $p : E \to B$ i $p' : E' \to B$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homeomorfizm $f : E \to E'$, taki że $p' \circ f = p$.

Nietrudno się przekonać, że jeżeli $p : E \to B$ jest wiązką lokalnie trywialną a diagram:

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle p'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \longrightarrow & B. \end{array}$$

pull-backiem, to $p' : E' \to X$ jest wiązką lokalnie trywialną.

Zachodzi twierdzenie:

3.22. Twierdzenie. *Niech $E \to B$ będzie wiązką lokalnie trywialną. Jeżeli odwzorowania $f, g : X \to B$ są homotopijne, to wiązki indukowane przez f i g są izomorficzne.*

[A-G-P] 4.6.3 i 4.6.4

Inne zadania dotyczące rozwłóknień:

Z 3.23. Pokazać, że złożenie rozwłóknień jest rozwłóknieniem.

Z 3.24. Jeżeli w rozwłóknieniu baza oraz pewne włókno są łukowo spójne, to przestrzeń rozwłóknienia jest także łukowo spójna.

Z 3.25. Pokazać, że jeżeli $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem, E jest łukowo spójna zaś B jednospójna, to włókna rozwłóknienia p są łukowo spójne.

Z 3.26. Udowodnić, że jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest rozwłóknieniem zaś X przestrzenią lokalnie zwartą, to $p': C(X, E) \longrightarrow C(X, B)$ jest także rozwłóknieniem.

Z 3.27. Niech $p: Y^I \longrightarrow Y$, $p(\omega) = \omega(0)$ będzie rozwłóknieniem przez drogi. Udowodnić, że jeżeli Y jest rozmaitością topologiczną, to powyższe rozwłóknienie jest lokalnie trywialne.

♡ Z 3.28. Pokazać, że jeżeli $j : A \hookrightarrow X$ jest silnym retraktem deformacyjnym, przekształcenie $p : E \to B$ rozwłóknieniem i diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[g]{} & E \\ {\scriptstyle j}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[f]{} & B. \end{array}$$

jest przemienny, to istnieje podniesienie $h : X \to E$ takie ze $p \circ h = f$ i $h \circ j = g$.

♡ Z 3.29. Pokazać, że jeżeli $A \hookrightarrow X$ jest domkniętym korozwłóknieniem, $p : E \to B$ rozwłóknieniem i diagram

$$\begin{array}{ccc} (A \times I) \cup X \times \{0\} & \xrightarrow[f]{} & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X \times I & \xrightarrow[h]{} & B \end{array}$$

jest przemienny, to istnieje podniesienie $H : X \times I \to E$, takie, że $p \circ H = h$ i $H_{|A\times I \cup X \times \{0\}} = f$. (Wskazówka: Skorzystać z lematu 2.3)

⋆ Z 3.30. Udowodnić twierdzenie Dolda. Niech B posiada numerowalne pokrycie otwarte takie, że włożenie $U \hookrightarrow B$ jest ściągalne dla każdego zbioru pokrycia. Niech $p: E \longrightarrow B$ i $p': E' \longrightarrow B$ będą rozwłóknieniami zaś $f: E \to E'$ przekształceniem nad B. Wówczas f jest włóknistą homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu $b \in B$, $f_{|p^{-1}(b)}: p^{-1}(b) \longrightarrow {p'}^{-1}(b)$ jest homotopijną równoważnością. [P]

Z 3.31. [H] Dla rozwłóknienia $p : E \to B$ nad przestrzenią łukowo spójną zdefiniować działanie grupy $[(X,x),\Omega(B,b)]_*$ na $[(X,x),(F,e)]_*$, gdzie $F = p^{-1}(b)$. Pokazać, że w ciągu

$$[(X,x),(F,e)]_* \to [(X,x),(E,e)]_* \to [(X,x),(B,b)]_*,$$

przekształcenie $[(X,x),(F,e)]_*/[(X,x),\Omega(B,b)]_* \to [(X,x),(E,e)]_*$ jest różnowartościowe.

Z 3.32. Znaleźć rozwłóknienie $E \longrightarrow B$ takie, że $B \approx CP^\infty$, $E \approx S^2$, zaś włókno jest homotopijnie równoważne z S^3.

Pytania testowe do rozdziałów 1,2,3

♡ T 3.33. Niech $y_0 \in Y$. Homotopijnym włóknem włożenia $y_0 \to Y$ jest ________.

♡ T 3.34. Niech $y_0 \in Y$. Homotopijnym kowłóknem (stożkiem) $Y \to y_0$ jest ________.

T 3.35. Niech $f : X \to Y$, gdzie Y jest przestrzenią ściągalną. Wówczas X jest homotopijnym włóknem f.

T 3.36. Homotopijnym włóknem $f : Y \to X$, gdzie Y jest ściągalną jest ________.

T 3.37. Niech $* \in S^1$, niech $A = S^1 \vee S^1 \subset S^1 \times S^1$, $A = \{(x,y): x = * \text{ lub } y = *\}$. Niech $X = S^1 \times S^1 \cup_A D^2 \vee D^2$. Wówczas $X \approx S^2$.

T 3.38. Niech Y będzie przestrzenią łukowo spójną i niech $y_0, y_1 \in Y$. Czy przestrzenie $\Omega(Y,y_0)$ i $\Omega(Y,y_1)$ są homotopijnie równoważne?

T 3.39. Niech (Y,y) będzie przestrzenią łukowo spójną z punktem wyróżnionym. Każde dwie składowe łukowe przestrzeni $\Omega(Y,y)$ są homotopijnie równoważne.

T 3.40. Grupa $\pi_1(\Omega Y, *)$ jest zawsze abelowa.

T 3.41. Niech (Y,y) będzie przestrzenią łukowo spójną z punktem wyróżnionym. Liczba składowych łukowych przestrzeni $\Omega(Y,y)$ jest równa rzędowi grupy $\pi_1(Y,*)$.

T 3.42. Niech $p: E \longrightarrow B$ będzie rozwłóknieniem lokalnie trywialnym z włóknem F. Jeżeli jest ono włókniście homotopijnie równoważne z rozwłóknieniem trywialnym, to istnieje homeomorfizm $h: E \longrightarrow B \times F$ taki, że $\pi_B \circ h = p$, gdzie π_B jest rzutowaniem.

T 3.43. Rozwłóknienie nad przestrzenią ściągalną jest włókniście homotopijnie równoważne rozwłóknieniu trywialnemu.

T 3.44. Jeżeli $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem i homotopijną równoważnością, to $p : E \to B$ jest włókniście homotopijnie równoważne z rozwłóknieniem $id : B \to B$ i w szczególności włókna są ściągalne.

T 3.45. Niech $p: E \to B$ oraz $p': E' \to B$ będą rozwłóknieniami. Niech $f, f': E \to E'$ będą przekształceniami włóknistymi (tzn. $p' \circ f = p$ i $p' \circ f' = p$). Jeżeli f i f' są homotopijne, to są włókniście homotopijne.

T 3.46. Jeżeli E i E' są homotopijnie równoważne, to rozwłóknienia $p: E \to B$, $p': E' \to B$, są włókniście homotopijnie równoważne.

T 3.47. Jeżeli E i E' są ściągalne, to rozwłóknienia $p: E \to B$, $p': E' \to B$, są włókniście homotopijnie równoważne.

T 3.48. Jeżeli $p : E \to B$ jest nakryciem, to funkcja podnosząca drogi $E \times_B B^I \to E^I$ jest wyznaczona jednoznacznie.

T 3.49. Niech $[x_0] \in \mathbb{RP}^n$, gdzie $[x]$ oznacza klasę punktu $x \in \mathbb{R}^n$ w $\mathbb{RP}^n$. Niech $A \subset S^n \times (\mathbb{RP}^n)^I$, $A = \{(x, \omega)\colon \omega(0) = [x_0], \quad \omega(1) = [x]\}$. Wówczas:

A ma ________ składowych.

Każda składowa A jest ściągalna.

T 3.50. Niech $p : E \to B$ będzie rozwłóknieniem, z wyróżnionym punktem $e_0 \in E$. Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną, a $f : X \to B$ przekształceniem ciągłym. Jeżeli f_1, f_2 są podniesieniami f przy czym $f_1(x_o) = f_2(x_0) = e_0$, to f_1 i f_2 są włókniście homotopijne.

T 3.51. $\Omega\mathbb{CP}^\infty \approx S^1$.

T 3.52. Jeżeli $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem, zaś $f : E' \to E$ homotopijną równoważnością, to $pf : E' \to B$ jest rozwłóknieniem.

T 3.53. Jeżeli $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem z włóknem F, zaś $f : E' \to E$ homotopijną równoważnością, to F jest homotopijnym włóknem $pf : E' \to B$.

T 3.54. Niech $p : E \to B$ będzie rozwłóknieniem, zaś $\omega \in B^I$ drogą. Jeżeli $\tilde{\omega}$ i $\tilde{\tilde{\omega}}$ są podniesieniami ω o tym samym początku, to $\tilde{\omega}(1) = \tilde{\tilde{\omega}}(1)$.

T 3.55. Niech $p : E \to B$ będzie rozwłóknieniem, zaś $\omega \in B^I$ drogą. Jeżeli $\tilde{\omega}$ i $\tilde{\tilde{\omega}}$ są podniesieniami ω o tym samym początku, to $\tilde{\omega}(1)$ i $\tilde{\tilde{\omega}}(1)$ leżą w tej samej składowej łukowej włókna.

4. Grupy homotopii

W tym rozdziale wprowadzimy ciąg funktorów $\pi_n : \mathcal{T}oph_* \to Gr$, uogólniających funktor grupy podstawowej.

Przypomnijmy (zadanie 0.32), że sfera S^n jest homeomorficzna ze zredukowanym zawieszeniem $S(S^{n-1})$, $n \geq 1$. Dla dowolnego punktu $x \in S^n$ sfera jest dobrze punktowana, dowolne dwie pary (S^n, x) i (S^n, y) są nie tylko homotopijnie równoważne, ale i homeomorficzne. Dla wygody przyjmiemy, że wybieramy jeden z dwóch punktów w S^0, a w sferach wyższych wymiarów wyróżniony punkt zawieszenia.

Zawieszenie zredukowane jest kogrupą w $Toph_*$ więc $[(S^n, *), \cdot]$ jest funktorem w kategorię grup.

4.1. Definicja. *Niech (X, x) będzie przestrzenią z wyróżnionym punktem. N-tą grupą homotopii, $n \geq 1$ nazywamy grupę:*

$$\pi_n(X, x) = [(S^n, *), (X, x)]$$

Działanie grupowe wynika ze struktury zawieszenia. Niekiedy wygodnie nam będzie posługiwać się innymi modelami:

$$\pi_n(X, x) = [(D^n, S^{n-1}), (X, x)]$$

$$\pi_n(X, x) = [(I^n, \partial I^n), (X, x)]$$

♡ Z 4.2. Opisać działanie grupowe dla obu powyższych modeli.
Uwaga: Grupy homotopii "widzą" tylko tę składową łukową, do której należy punkt wyróżniony. Bez zmniejszenia ogólności naszych rozważań będziemy zakładać, że rozważane przestrzenie są łukowo spójne.

4.3. Stwierdzenie. *Dla $n \geq 2$ grupy homotopii są przemienne.*

Wynika to natychmiast z zadań 0.29 i 0.35. Łatwo jest także, szczególnie używając modelu odwzorowań z kostki, wypisać homotopię, która zapewnia przemienność. np.[F], [H]

Zacznijmy od zależności grup homotopii od wyboru punktu bazowego. Niech $\omega : I \to X$ będzie drogą, taką że $\omega(0) = x_0$, Niech $\alpha : (S^n, *) \to (X, x_0)$. Sfera jest dobrze punktowana, więc istnieje przedłużenie H, tak że diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
(S^n \times \{0\}) \cup (\{*\} \times I) \arrow[r, "\alpha \cup \omega"] \arrow[d] & X \\
S^n \times I \arrow[ur, "H"] &
\end{tikzcd}$$

Zdefiniujmy $\phi_\omega(\alpha) = H_{|S^n \times \{1\}}$, czyli $\phi_\omega(\alpha) : (S^n, *) \to (X, x_1)$.
Okazuje się, że klasa homotopii przekształcenia $\phi_\omega(\alpha)$ nie zależy od:
a) wybranego rozszerzenia homotopii
b) reprezentanta $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$
c) klasy homotopii względem końców drogi $[\omega]$.

♡ Z 4.4. Udowodnić powyższe stwierdzenie - wynika ono z zadania 3.14.
Przykład rozszerzenia: "balonik na druciku"
Zachodzi twierdzenie:

4.5. Twierdzenie. *Dla każdej klasy homotopii $[\omega]$ dróg względem końców i dowolnego $n \geq 1$ zdefiniowane jest przekształcenie*

$$\phi[\omega] : \pi_n(X, \omega(0)) \to \pi_n(X, \omega(1)).$$

Ponadto
a) $\phi[\omega] \circ \phi[\tau] = \phi[\tau \circ \omega]$
b) $\phi[\omega_x] = id$
c) $\phi[\omega]$ *jest izomorfizmem grup.*

Uzasadnienia wymaga jedynie punkt c), a właściwie fakt, że $\phi[\omega]$ jest homomorfizmem, gdyż z a) i b) wynika, że $\phi[\omega]^{-1} = \phi[\omega^{-1}]$. Niech $\alpha, \beta : (S^n, *) \to (X, \omega(0))$. Niech H i G będą homotopiami zbudowanymi dla zdefiniowania $\phi_\omega(\alpha)$ i $\phi_\omega(\beta)$ odpowiednio. Wówczas $F : S^n \times I \to (S^n \vee S^n) \times I = (S^n \times I) \vee (S^n \times I) \xrightarrow{H \vee G} X$ jest homotopią taką, że $[F_{|_0}] = [\alpha][\beta]$ i $F_{|_{* \times I}} = \omega$. Zatem $[F_{|_1}] = \phi[\omega]([\alpha][\beta])$, ale z konstrukcji $[F_{|_1}] = \phi[\omega]([\alpha])\phi[\omega]([\beta])$.

Z uwagi na powyższe twierdzenie, o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień będziemy opuszczali punkt wyróżniony w zapisie grup homotopii.

4.6. Stwierdzenie. *Niech $f, g : X \to Y$ będą przekształceniami homotopijnymi i niech $H : X \times I \to Y$ będzie homotopią od f do g. Dla punktu $x_0 \in X$ niech $\omega = H(x_0, \cdot)$. Wówczas dla dowolnego $n \geq 1$ przemienny jest następujący diagram grup i homomorfizmów.*

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, x_0) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & & \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[dl, "\phi[\omega]"] \\ & \pi_n(Y, g(x_0)) & \end{tikzcd}$$

Wynikają stąd natychmiast następujący wniosek:

4.7. Wniosek. *Jeżeli $f : X \to Y$ jest homotopijną równoważnością, to $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ jest izomorfizmem.*

4.8. Wniosek. *Wszystkie grupy homotopii przestrzeni ściągalnej są trywialne.*

Z 4.9. Na przykładzie "warszawskiej sinusoidy" przekonać się, że stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

4.10. Definicja. *Przestrzeń X nazywa się n – spójna jeżeli $\pi_r(X, x) = 0$ dla $r \leq n$.*

W szczególności przestrzeń 0 – spójna, to przestrzeń łukowo spójna.
Z twierdzenia 4.5 wynika natychmiast następujące:

4.11. Twierdzenie. *Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną, $x \in X$. Przekształcenie*

$$\pi_n(X, x) \times \pi_1(X, x) \to \pi_n(X, x)$$

$$([\alpha], [\omega]) \to \phi[\omega]([\alpha]$$

definiuje działanie z prawej strony grupy $\pi_1(X, x)$ na grupie $\pi_n(X, x)$, dla każdego $n \geq 1$.

4.12. Definicja. *Przestrzeń łukowo spójna X nazywa się n –* **prosta** *jeżeli działanie grupy $\pi_1(X,x)$ na grupie $\pi_k(X,x)$ jest trywialne dla każdego $k \leq n$.*
Przestrzeń łukowo spójna X nazywa się **prosta** *jeżeli jest n – prosta dla każdego n.*

♡ Z 4.13. Pokazać, że łukowo spójna dobrze punktowana H – przestrzeń jest prosta. W szczególności każda grupa topologiczna jest prosta. (Wskazówka: skorzystać z zadania 2.12)

Działanie grupy $\pi_1(X,x)$ na grupie $\pi_n(X,x)$ pozwala ustalić związek grupy $\pi_n(X,x)$ z klasami homotopii $[S^n, X]$ (swobodnej - to jest bez zachowania punktu wyróżnionego).

4.14. Twierdzenie. *Naturalne przekształcenie $\pi_n(X,x) \to [S^n, X]$ indukuje naturalną bijekcję*

$$\pi_n(X,x)/\pi_1(X,x) \to [S^n, X].$$

4.15. Wniosek. *Niech $[\alpha] \in \pi_n(X,x)$. Element $[\alpha] = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie $\alpha : (S^n, *) \to (X,x)$ ma przedłużenie na dysk D^{n+1}.*

Uzasadnienia wymaga tylko implikacja "$\Leftarrow$". Istnienie przedłużenia na dysk jest równoznaczne z tym, że α jest homotopijne z przekształceniem stałym, bez warunku zachowania punktu wyróżnionego. Z twierdzenia powyżej wynika, że w tym przypadku jest to równoznaczne z $[\alpha] = 0$.

W definicji działania grupy $\pi_1(X,x)$ na grupie $\pi_n(X,x)$ korzystaliśmy tylko z tego, że sfera jest dobrze punktowana. Zatem dla dobrze punktowanej przestrzeni (Y,y) mamy w analogiczny sposób zdefiniowane działanie grupy $\pi_1(X,x)$ na zbiorze $[(Y,y),(X,x)]_*$ i twierdzenie:

4.16. Twierdzenie. *Naturalne przekształcenie $[(Y,y),(X,x)]_* \to [(Y,y),(X,x)]$ indukuje naturalną bijekcję*

$$[(Y,y),(X,x)]_*/\pi_1(Y,y) \to [(Y,y),(X,x)].$$

Zadania

♡ Z 4.17. Jeżeli przestrzeń Y jest jednospójna, to $[(Y,y),(X,x)]_* \to [(Y,y),(X,x)]$ jest bijekcją.

♡ Z 4.18. Pokazać,że jeżeli X jest grupą topologiczną i $x_0 \in X$ jest jedynką tej grupy, to $[(Y,y),(X,x_0)]_* \to [(Y,y),(X,x)]$ jest różnowartościowe. [H]

Z 4.19. Niech $\tilde{X} \longrightarrow X$ będzie nakryciem. Udowodnić, że jeżeli przestrzeń X jest n-prosta, to przestrzeń $\tilde{X}$ jest także n-prosta.

Pytania testowe

T 4.20. Jeżeli $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem, to "przenoszenie włókien po drogach" definiuje działanie grupy $\pi_1(B,b_0)$ na przestrzeni $p^{-1}(b_0)$.

T 4.21. Jeżeli $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem, to "przenoszenie włókien po drogach" definiuje działanie grupy $\pi_1(B,b_0)$ na grupie $\pi_n(p^{-1}(b_0),e_0)$.

T 4.22. Jeżeli dobrze punktowana przestrzeń (X, x) jest ściągalna, to istnieje ściągnięcie zachowujące punkt wyróżniony.

T 4.23. Jeżeli przestrzeń (X, x) jest dobrze punktowana, to dla dowolnych dwóch punktów $y_1, y_2 \in Y$ łukowo spójnej przestrzeni Y istnieje bijekcja $[(X, x), (Y, y_1)]_*$ i $[(X, x), (Y, y_2)]_*$.

T 4.24. Jeżeli przestrzenie (X, x_1) oraz (X, x_1) są dobrze punktowane, X łukowo spójna, to istnieje bijekcja $[(X, x_1), (Y, y)]_*$ i $[(X, x_2), (Y, y)]_*$

Metody obliczania grup homotopii

Zaczynamy od oczywistego stwierdzenia:

4.25. Stwierdzenie. *Dla każdego n zachodzi izomorfizm:*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$$

Naturalnym uogólniniem produktu jest rozwłóknienie i powyższe stwierdzenie dla rozwłóknień ma następującą postać:

4.26. Twierdzenie. *Jeżeli $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem, E- łukowo spójna to dokładny jest ciąg:*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(E, e) \ldots$$
$$\ldots \to \pi_1(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B),$$

gdzie $b = p(e)$. zaś homomorfizm ∂, jest zdefiniowany następująco:

Niech $[\alpha] \in \pi_n(B, b)$ będzie zadane przez przekształcenie $\alpha : (I^n, \partial I^n) \to (B, b)$. Odwzorowanie to można potraktować jako homotopię $I^{n-1} \times I \to B$. Homotopię tę można podnieść żądając, by na $\partial I^{n-1} \times I \cup I^{n-1} \times \{0\}$ była odwzorowaniem stałym w punkt $e \in E$- podniesienie to obcięte do $I^{n-1} \times \{1\}$ zadaje przekształcenie $(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (F, e)$ reprezentujące element $\partial([\alpha])$.

Poprawność definicji homomorfizmu brzegu wynika z twierdzenia 3.12. Sprawdzenie dokładności pozostawiamy czytelnikowi- proszę zauważyć, że ostatnie trzy wyrazy ciągu nie są grupami lecz jedynie zbiorami z wyróżnionym punktem. Ciąg nazywamy ciągiem dokładnym homotopii rozwłóknienia.

♡ Z 4.27. Napisać ciąg dokładny homotopii rozwłóknienia dla nakrycia.

♡ Z 4.28. Napisać ciąg dokładny homotopii rozwłóknienia dla rzutowania $X \times Y \to Y$ i wywnioskować stwierdzenie 4.25.

⋆ Z 4.29. Sprawdzić, że ciąg dokładny, jaki otrzymamy stosując twierdzenie 3.18 oraz 1.16 dla $W = (S^0, *)$ pokrywa się z ciągiem opisanym powyżej.

Uwaga: Zauważmy, że istnienie ciągu dokładnego jak wyżej wymaga tylko, by można było podnosić homotopie zdefiniowane na kostkach - jest to warunek słabszy niż rozwłóknienie i takie przekształcenia nazywamy rozwłóknieniami Serre'a.

Homotopie relatywne i ciąg dokładny pary.

Niech $i : A \subset X$ będzie włożeniem i niech F_i będzie jego homotopijnym włóknem nad punktem $a_0 \in A \subseteq X$. Dla rozwłóknienia $N_i \xrightarrow{p} X$ rozpatrzmy długi ciąg dokładny homotopii. Niech $s : A \to N_i$ oraz $t : N_i \to A$ będą homotopijnymi równoważnościami (jak w 1.10)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \pi_n(F_i,*) & \longrightarrow & \pi_n(N_i,*) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(X,a_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F_i,*) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & & & {\scriptstyle s_*}\uparrow & & & & \\
 & & & & \pi_n(A,a_0) & & & &
\end{array}$$

Zauważmy, że $p_* s_* = i_* : \pi_n(A,a_0) \to \pi_n(X,a_0)$. Przyjrzymy się bliżej grupie $\pi_{n-1}(F_i,*) = [(I^{n-1},\partial I^{n-1}),(F_i,*)]_*$. Przypomnijmy, że

$$F_i = \{(a,\omega) \in A \times X^I .: \omega(0) = a,\, \omega(1) = a_0\}$$

Zatem przekształceniu $\alpha : (I^{n-1},\partial I^{n-1}) \to \{(a,\omega) : \omega(0) = a,\, \omega(1) = a_0\}$ wzajemnie jednoznacznie możemy przyporządkować przekształcenie trójek przestrzeni topologicznych

$$\bar{\alpha} : (I^n, \partial I^n, \partial I^{n-1} \times I \cup I^{n-1} \times \{1\}) \to (X, A, a_0),$$

wzorem $\bar{\alpha}(x,t) = \alpha(x)(t)$. Wynika z tego, że $\pi_{n-1}(F_i,*)$ to klasy homotopii trójek $[(I^n, \partial I^n, \partial I^{n-1} \times I \cup I^{n-1} \times \{0\}), (X, A, a_0)]_*$ (przez wzgląd na ustalony zwyczaj zamieniliśmy górne i dolne denko kostki I^n). Wprowadzamy definicję:

4.30. Definicja. *Jeżeli $A \subseteq X$ jest podprzestrzenią, z wyróżnionym punktem a_0, to n – tą grupa homotopii pary, $n \geq 1$ oznaczaną symbolem $\pi_n(X,A,a_0)$ nazywamy*

$$\pi_n(X,A,a_0) = [(I^n, \partial I^n, \partial I^{n-1} \times I \cup I^{n-1} \times \{0\}), (X, A, a_0)]_*$$

Uwaga: $\pi_n(X,A,a_0)$ jest grupą dla $n \geq 2$ i grupą abelowa dla $n \geq 3$.. Oczywiście możemy także uważać, że $\pi_n(X,A) = [(D^n, S^{n-1}, *), (X, A, a_0)]_*$. Jest jasne, że $\pi_n(X,A,a_0)$ jest funktorem z kategorii par przestrzeni z wyróżnionym punktem w kategorię grup ($n \geq 1$).

Dokonując podstawienia w ciągu dokładnym rozwłóknienia i nazywając ∂ złożenie homomorfizmu indukowanego przez włożenie homotopijnego włókna z $t_* : N_i \to A$ dostajemy:

4.31. Stwierdzenie. *Jeżeli $A \subseteq X$ jest podprzestrzenią, z wyróżnionym punktem $a_0 \in A$, to dokładny jest następujący ciąg homotopii pary:*

$$\ldots \pi_{n+1}(X,A,a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A,a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X,a_0) \xrightarrow{p} \pi_n(X,A,a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X,A,a_0) \ldots$$
$$\ldots \pi_1(X,A,a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A,a_0) \to \pi_0(X,a_0).$$

Uwaga: Rozważania o niezależności z dokładnością do izomorfizmu grup relatywnych od wyboru punktu bazowego można przenieść do grup relatywnych. Dlatego, gdy nie będzie to prowadziło do nieporozumień , podobnie jak w przypadku absolutnym, będziemy opuszczali w zapisie punkt wyróżniony.

♡ Z 4.32. Pokazać, że dowolna droga $\omega : I \to A$ definiuje izomomorfizm

$$\varphi_{[\omega]} : \pi_n(X, A, \omega(0)) \to \pi_n(X, A, \omega(1))$$

zależny tylko od klasy homotopii ω względem końców. Udowodnić, że mamy zdefiniowane działanie grupy $\pi_1(A, a_0)$ na $\pi_n(X, A, a_0)$.

Analogicznie jak w przypadku absolutnym mamy

4.33. Twierdzenie. *Jeżeli $f : (X, A, a_0) \to (Y, B, f(a_0))$ jest homotopijną równoważnością par, to $f_* : \pi_n(X, A, a_0) \to \pi_n(Y, B, f(a_0))$ jest izomorfizmem.*

Przez analogię wprowadzamy definicję:

4.34. Definicja. *Para przestrzeni (X, A) nazywa się n – spójna jeżeli przekształcenie $\pi_0(A) \to \pi_0(X)$ jest epimorfizmem i $\pi_k(X, A, a) = 0$ dla $k \leq n$ i dowolnego wyboru punktu $a \in A$*

Zbiór przekształceń ciągłych między dwoma przestrzeniami jest bardzo duży i jak wiemy przekształcenia ciągłe mogą zachowywać się patologicznie - np. krzywa Sierpińskiego. Jeżeli na rozpatrywanych przestrzeniach istnieje dodatkowa struktura np. kombinatoryczna (kompleksu symplicjalnego) lub gładka to w danej klasie homotopii możemy szukać przekształcenia które te strukturę zachowuje i to dostarcza często dodatkową informację. Sfery są gładkimi rozmaitościami i wybierzemy strukturę gładką. Podstawą będą następujące dwa twierdzenia.[A-G-P]

4.35. Twierdzenie. *Niech $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ będą ograniczonymi otwartymi podzbiorami i niech $\varphi : U \to V$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Niech $W, W' \subset \mathbb{R}^m$ będą takimi otwartymi podzbiorami, że $\bar{W} \subset W' \subset \bar{W}' \subset U$. Wówczas istnieje odwzorowanie $\psi : U \to V$, takie że:*

1) $\psi_{|W} : W \to V$ jest gładkie

2) $\psi_{|(U \setminus W')} = \varphi_{|(U \setminus W')}$

3) $\varphi \sim \psi$ względem $(U \setminus W')$

4.36. Twierdzenie Sarda. *Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie podzbiorem otwartym, zaś $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ przekształceniem gładkim. Wówczas zbiór wartości regularnych ψ jest gęsty.*

4.37. Twierdzenie. *Jeżeli $k < n$, to $\pi_k(S^n) = 0$*

Dowód jest oczywisty - w klasie homotopii dowolnego elementu wybieramy odwzorowanie gładkie, a z twierdzenia Sarda wynika, że jego obraz nie jest całą sferą, a więc leży w zbiorze ściągalnym $S^n \setminus \{pt\}$.

4.38. Wniosek. *Grupa $\pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ i $\pi_3(S^2) \simeq \pi_3(S^3)$.*

Dla dowodu wystarczy napisać ciąg dokładny rozwłóknienia Hopfa $S^3 \to S^2$ i skorzystać z tego, że wiemy iż $pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. W przyszłości pokażemy, że $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ dla każdego n.

Zadania

Z 4.39. Niech $p: E \longrightarrow B$ będzie rozwłóknieniem z włóknem F. Pokazać, że jeżeli włożenie $F \longrightarrow E$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym, to dla każdego $n \geq 2$ ciąg

$$0 \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(F) \longrightarrow 0$$

jest dokładny i rozszczepialny.

Z 4.40. Niech $p: E \longrightarrow B$ będzie rozwłóknieniem z włóknem F nad przestrzenią łukowo spójną. Pokazać, że jeżeli rozwłóknienie to ma przekrój, tzn. jeżeli istnieje $s: B \longrightarrow E$ takie, że $ps = id_B$ lub jeżeli pewne włókno jest retraktem E, to dla $n > 1$,

$$\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F)$$

.

Z 4.41. Rozpatrzmy działanie sfery $S^3 \subseteq \mathbb{H}$, traktowanej jako grupa kwaternionów o module 1, na sferze $S^7 \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ zadane wzorem $q(q_1, q_2) = (qq_1, qq_2)$. Udowodnić, że S^7/S^3 jest homeomorficzna z S^4 i że rzutowanie na przestrzeń orbit $S^7 \to S^4$ jest rozwłóknieniem (Hopfa). Pokazać,że dla $n \geq 2$:

$$\pi_n(S^4) \approx \pi_n(S^7) \oplus \pi_{n-1}(S^3)$$

Z 4.42. [H] Pokazać, że jeżeli $S^m \to S^n$ jest rozwłóknieniem z włóknem S^k, to $k = n - 1$ i $m = 2n - 1$.

Pokazać, że jeżeli istniałoby rozwłóknienie jak wyżej dla każdego n, to grupy homotopii $\pi_i(S^n)$ byłyby skończenie generowane i wolne abelowe, niezerowe dla $i \geq n \geq 2$ i wyliczlne przez indukcję.(ale tak nie jest i życie jest bardziej skomplikowane ..i ciekawsze)

Z 4.43. Niech X będzie przestrzenią jednospójną. Niech $A \subset X$, $* \in A$. Pokazać, że jeżeli grupy $\pi_r(X, *)$ oraz $\pi_r(A, *)$ są skończenie generowane dla $r > 1$, to grupy $\pi_r(X, A)$ są skończenie generowane dla $r > 2$.Czy założenie jednospójności X jest istotne?

Z 4.44. Udowodnić, że jeżeli X jest łukowo spójna i $A \subseteq X$ jest retraktem X, to $\pi_i(X, *) = \pi_i(A, *) \oplus \pi_i(X, A)$ dla $i \geq 1$.

Z 4.45. Udowodnić, że jeżeli X jest łukowo spójna i włożenie $A \hookrightarrow X$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym, to $\pi_i(X, A) = \pi_i(A, *) \oplus \pi_i(X, *)$ dla $i \geq 1$.

♡ Z 4.46. Znaleźć $\pi_n(X)$ oraz działanie grupy $\pi_1(X)$ na $\pi_n(X)$ jeżeli:
a) $X = \mathbb{RP}^n$ (założyć, że $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$)
b) $X = S^1 \vee S^n$

♡ Z 4.47. Udowodnić, że jeżeli $A \subseteq B \subseteq X$, to dokładny jest następujący ciąg trójki:

$$\ldots \pi_i(B, A) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X, A) \xrightarrow{j_*} \pi_i(X, B) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(B, A) \ldots,$$

gdzie $i : (B, A) \to (X, A)$ i $j : (X, A) \to (X, B)$ są włożeniami.

Pytania testowe

T 4.48. $\mathbb{RP}^\infty$ jest przestrzenią ściągalną.

T 4.49. $\pi_n(S^2 \vee S^1, S^1) \cong \pi_n(S^2)$, dla $n \geq 1$.

T 4.50. Włożenie $\mathbb{RP}^k \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, $k \leq n$ jest ściągalne.

T 4.51. Homomorfizm $\pi_i(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow \pi_i(\mathbb{RP}^3)$ indukowany przez włożenie $\mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^3$, jest zerowy dla $i \leq 2$.

T 4.52. Homomorfizm $\pi_3(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow \pi_3(\mathbb{RP}^3)$ indukowany przez włożenie $\mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^3$, jest izomorfizmem.

T 4.53. Homomorfizm $\pi_4(\mathbb{RP}^3) \longrightarrow \pi_4(\mathbb{RP}^4)$ indukowany przez włożenie $\mathbb{RP}^3 \longrightarrow \mathbb{RP}^4$, jest izomorfizmem.

5. Kompleksy komórkowe, czyli CW – kompleksy

5.1. Definicja. *Przekształcenie $f : X \to Y$ nazywamy* **n – równoważnością** *wtedy i tylko wtedy, gdy homomorfizm indukowany $f_* : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ jest izomorfizmem dla $i \leq n-1$ i epimorfizmem dla $i = n$.*
Przekształcenie $f : X \to Y$ nazywamy **słabą homotopijną równoważnością** *wtedy i tylko wtedy, gdy homomorfizm indukowany $f_* : \pi_i(X,*) \to \pi_i(Y,*)$ jest izomorfizmem dla każdego n i dowolnego punktu bazowego.*

Jakie przestrzenie "widzą" grupy homotopii? Odwołamy się do filozofii lematu Yonedy - powiemy, że przestrzeń A jest "sympatyczna", jeżeli dowolna słaba homotopijna równoważność $f : X \to Y$ indukuje bijekcję $f_* : [A, X] \to [A, Y]$.

♡ Z 5.2. Pokazać,że słaba homotopijna równoważność między "sympatycznymi" przestrzeniami jest homotopijną równoważnością.

Naszym celem będzie opis klasy "sympatycznych" przestrzeni - nazywają się one **kompleksami komórkowymi** lub **CW kompleksami** i powstają w procesie indukcyjnym przez doklejanie dysków coraz większych wymiarów.

5.3. Definicja. *Zdefiniujemy kompleks komórkowy X. Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dany będzie zbiór I_n. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy przestrzeń X^n nazywaną* **n – tym szkieletem** *kompleksu X.*

- *Niech X^0 będzie zbiorem I_0 z dyskretną topologią*

•• *Niech dla każdego $i \in I_n$, $n \geq 1$ będzie dane odwzorowanie $f_i : {S^{n-1}}_i \to X^{n-1}$, ${S^{n-1}}_i = S^{n-1}$ zwane odwzorowaniem przyklejającym komórkę. Definiujemy przestrzeń X^n jako push-out diagramu*

$$\begin{array}{ccc}
\bigvee\limits_{i\in I_n} S_i^{n-1} & \xrightarrow{\bigvee\limits_{i\in I_n} f_i} & X^{n-1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigvee\limits_{i\in I_n} D_i^{n} & \xrightarrow{\bigvee\limits_{i\in I_n} \bar{f}_i} & X^{n}.
\end{array}$$

• • • *Definiujemy $X = \lim\limits_{\to} X^n$ z topologią granicy prostej.*

Przyjmujemy następującą terminologię:

n – wymiarową **komórką domkniętą** nazywamy obraz $\tilde{f}_i(D_i^n)$ domkniętego dysku w X

n – wymiarową **komórką otwartą** nazywamy obraz $\tilde{f}_i(\operatorname{int} D_i^n)$ otwartego dysku w X

Z tej definicji wynika szereg ogólnotopologicznych własności CW kompleksów, które tu przytaczamy pozostawiając dowód czytelnikowi lub odsyłając go do podręcznika [S], [A-G-P], [B].

.

.

ciąg dalszy nastąpi a na razie zadania;

Z 5.4. Wykazać, że jeżeli $p: E \longrightarrow X$ jest nakryciem i X jest CW-kompleksem to E ma strukture CW-kompleksu taką, że p jest przekształceniem komórkowym.

Z 5.5. Wykazać, że jeżeli $p: E \longrightarrow X$ jest rozwłóknieniem lokalnie trywialnym z włóknem F oraz X i F są CW-kompleksami to E ma strukture CW-kompleksu taką, że p jest przekształceniem komórkowym.

Z 5.6. Opisać odwzorowanie $S^{n+m} \to S^n \vee S^m$ doklejające komórkę $n{+}m$ wymiarową w produkcie $S^n \times S^m$.

Z 5.7. Przestrzenie rzutowe $\mathbb{R}P(n)$ i $\mathbb{C}P(n)$, są CW-kompleksami. Znaleźć odwzorowania doklejające.

Z 5.8. Podać przykład przestrzeni topologicznej, której wszystkie grupy homotopii znikają, a która nie jest sciągalna.

Z 5.9. Podać przykład przekształcenia ciagłego $f : X \longrightarrow Y$ między CW-kompleksami takiego, że f_* jest zerowe na wszystkich grupach homotopii natomiast f nie jest homotopijne z przekształceniem stałym.

Z 5.10. Opisać zbiór klas homotopii $[S^1 \times S^1, S^2]$.

Z 5.11. Opisać zbiór klas homotopii $[S^1 \times S^1, \mathbb{RP}^2]$.

Z 5.12. Niech $M = I \times D^2/\sim$, gdzie $(0, z) \sim (1.\bar{z})$, przy czym D^2 jest traktowane jak dysk w $\mathbb{C}$. Niech $K \subset M$, $K = I \times S^1/\sim$.
a) Opisać M jako CW kompleks.
b) Znaleźć $\pi_i(M, *) =$ i $\pi_i(M, K)$.

♡ Z 5.13. Udowodnić, że dowolne dwa łukowo spójne CW-kompleksy X i Y takie, że $\pi_i(X) \cong \pi_i(Y)$ dla wszystkich $i > 0$ oraz są niezerowe tylko dla jednego $i = n$ są homotopijnie równoważne.

Z 5.14. Znaleźć $\pi_2(S^1 \vee S^2)$, $\pi_3(S^1 \vee S^2)$, $\pi_2(S^2 \vee S^2)$,$\pi_3(S^2 \vee S^2)$,$\pi_3(S^2 \vee S^2 \vee S^2)$.

Z 5.15. Znaleźć $\pi_i(S^n(K(\mathbb{Z}_2, n)))$ dla $N < n >$, $i < N + 2n + 1$.

Z 5.16. Niech grupa $\mathbb{Z}_p =< e^{2\pi i/p} >$ działa na $S^1 \subset \mathbb{C}$ przez mnożenie. Niech $X = D^2/\sim$, gdzie $z \sim z' \iff z,\ z' \in S^1$i z,z' leżą w tej samej orbicie działania $\mathbb{Z}_p$. Co można powiedzieć o grupach $\pi_i(X)$.

Z 5.17. Niech $X = S^1 \vee S^2$. Niech $f: S^2 \to X$ będzie złożeniem $f = i \circ \varphi$, gdzie $\varphi: S^2 \to S^2$ jest przekształceniem stopnia 2, zaś $i: S^2 \to S^1 \vee S^2$ włożeniem w bukiet.Niech $Y = X \cup_f D^3$ Znaleźć $\pi_i(Y)$ dla $i = 1,\ 2,\ 3$.

Z 5.18. Niech $X = \mathbb{R}P^2 \vee \Sigma(S^1 \times S^1)$. Znaleźć $\pi_*(X; \mathbb{Z})$ w terminach $\pi_*(S^2)$.

Z 5.19. Niech $E \to X$ oraz $E' \to X$ będą rozwłóknieniami, przy czym X jest łukowo spójna, zaś E i E' mają typ homotopii CW kompleksów. Niech $f : E \to E'$ będzie przekształceniem włóknistym. Pokazać, że jeśli f jest słabą równoważnością w obcięciu do pewnych włókien, to f jest włóknistą homotopijną równoważnością.

Z 5.20. Niech $p : E \to X$ będzie rozwłóknieniem z włóknem $F = p^{-1}(x_0)$, gdzie X jest łukowo spójna, zaś E ma typ homotopii CW kompleksu. Pokazać, że jeżeli istnieje $f : E \to F$ takie, że $f_{|F} \sim id_F$, to $p : E \to X$ jest włókniście homotopijnie trywialne.

T 5.21. Jeżeli X jest CW-kompleksem 4-spójnym i $\pi_5(X) \cong \Sigma_3$,to:
a) X ma co najmniej 6 komórek 5-cio wymiarowych
b) X ma co najwyżej 6 komórek 5-cio wymiarowych
c) X nie ma komórek wymiaru 1, 2, 3, 4.
d) istnieje CW-kompleks $Y \approx X$, dla którego $Y^{(5)} = S^5 \vee S^5$.
e) Każdy CW- kompleks homotopijnie równoważny z X ma skończoną liczbę ko-mó-rek 5-cio wymiarowych.

6. TEORIA HOMOLOGII

Niech R będzie ustalonym pierścieniem przemiennym z 1.

6.1. Definicja. **Kompleksem łańcuchowym** *R – modułów nazywamy ciąg R – modułów i homomorfizmów*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \qquad n \in \mathbb{Z}$$

taki, że dla każdego n,

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0.$$

Homomorfizmy ∂_n nazywamy homomorfizmami brzegu.

Kompleks łańcuchowy będziemy oznaczać symbolem $C = (C_*, \partial_*)$ albo dla uproszczenia po prostu C.

6.2. Definicja. *Przekształceniem łańcuchowym $f : C \to C'$ kompleksów łańcuchowych nazywamy ciąg homomorfizmów R-modułów, $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$, dla którego poniższy diagram jest przemienny:*

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots
\end{array}$$

Możemy więc mówić o kategorii kompleksów łańcuchowych R – modułów i przekształceń łańcuchowych. Będziemy ją oznaczać $\mathcal{CC}_R$.

6.3. Definicja. *Podmoduł $ker\partial_n$ nazywamy podmodułem n – wymiarowych* **cykli** *zaś podmoduł $im\partial_{n+1}$ podmodułem n – wymiarowych* **brzegów**.

Wprowadzamy definicję:

6.4. Definicja. *Modułami homologii kompleksu łańcuchowego $C = (C_*, \partial_*)$ nazywamy moduły ilorazowe*

$$H_n(C) = ker\partial_n / im\partial_{n+1} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Wygodnie jest rozpatrywać wszystkie moduły homologii jednocześnie - piszemy wtedy $H(C) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C)$ i mówimy, że mamy R – moduł z gradacją.

Nietrudno zauważyć, że przekształcenie łańcuchowe $f : C \to C'$ kompleksów łańcuchowych definiuje homomorfizm ich modułów homologii:

$$f_* : H_n(C) \to H_n(C'), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

co zapisujemy $f_* : H(C) \to H(C')$. Mamy więc funktor $H : \mathcal{CC}_R \to \mathcal{M}odgr_R$ z kategorii kompleksów łańcuchowych w kategorię R – modułów z gradacją.

Wprowadzamy definicję, która jest algebraicznym odpowiednikiem pojęcia homotopii przekształceń ciągłych:

6.5. Definicja. *Przekształcenia łańcuchowe $f, g: C \longrightarrow C'$ są łańcuchowo homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg homomorfizmów R-modułów $D_n: C_n \longrightarrow C'_{n+1}$, taki że dla każdego n*

$$\partial_{n+1} D_n + D_{n-1}\partial_n = f_n - g_n.$$

Łańcuchowa homotopia jest oczywiście relacja równoważności i mówimy o klasach homotopii łańcuchowej przekształceń łańcuchowych.

6.6. Definicja. *Przekształcenie łańcuchowe $f_*: C \longrightarrow C'$ jest łańcuchową homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie łańcuchowe $g: C' \longrightarrow C$, dla którego złożenia $g \circ f$ i $f \circ g$ są łańcuchowo homotopijne z identycznościami na kompleksach C i C' odpowiednio.*

Kategorię kompleksów łańcuchowych i klas homotopii przekształceń łańcuchowych oznaczamy symbolem $\mathcal{C}Ch_R$. Funktor homologii jest funktorem dobrze zdefiniowanym na kategorii $\mathcal{C}Ch_R$, co jest treścią poniższego twierdzenia:

6.7. Stwierdzenie. *Przekształcenia łańcuchowo homotopijne kompleksów łańcuchowych indukują ten sam homomorfizm ich grup homologii w każdym wymiarze.*

6.8. Wniosek. *Przekształcenie łańcuchowe będące łańcuchową równoważnością indukuje izomorfizm grup homologii.*

Jeżeli R jest pierścieniem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, to mówimy o kompleksach grup abelowych i ich grupach homologii.

6.9. Definicja. *Jeżeli $C' \leqslant C$ jest podkompleksem kompleksu łańcuchowego, to kompleksem ilorazowym C/C' nazywamy kompleks*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n/C'n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}/C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots,$$

w którym homomorfizmy brzegu są indukowane przez homomorfizmy brzegu kompleksu C.

Moduły homologii kompleksu C/C' oznaczamy symbolem $H(C, C')$ i nazywamy modułem homologii pary (C, C').

6.10. Definicja. *Ciąg $0 \to C' \xrightarrow{i} C \to C'' \xrightarrow{j} 0$ kompleksów łańcuchowych nazywa się dokładny, jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ ciąg $0 \to C'_n \xrightarrow{i} C_n \to C''_n \xrightarrow{j} 0$ jest dokładny.*

Ciąg jak wyżej nazywa się krótkim ciągiem dokładnym kompleksów łańcuchowych. Indukuje on długi ciąg dokładny grup homologii i to stwierdzenie nosi nazwę lematu o wężu.

6.11. Lemat o wężu. *Jeżeli ciąg kompleksów łańcuchowych $0 \to C' \xrightarrow{i} C \to C'' \xrightarrow{j} 0$ jest dokładny, to istnieje naturalny homomorfizm $\partial : H(C'') \to H(C')$ stopnia -1, taki że dokładny jest ciąg:*

$$\ldots \xrightarrow{j_*} H_{n+1} \to$$

Możemy tak przenumerować indeksy, by homomorfizmy brzegu podwyższały indeks o jeden. Mówimy wówczas o kompleksie kołańcuchowym,homomorfizmach kobrzegu, kocyklach i kobrzegach oraz modułach kohomologii. Wszystkie pojęcia wprowadzane dla kompleksów łańcuchowych i dotyczące ich stwierdzenia mają swoje oczywiste odpowiedniki dla kompleksów kołańcuchowych.

6.12. Przykład. Jeżeli M jest rozmaitością różniczkową, niech $C^n(M) = \Omega^n(M)$ oznacza rzeczywistą przestrzeń liniową gładkich $n-$form różniczkowych na M (gdzie 0-formy, to rzeczywiste funkcje gładkie), zaś $\partial^n : \Omega^n(M) \longrightarrow \Omega^{n+1}(M)$ niech będzie różniczkowaniem zewnętrznym. W ten sposób rozmaitości przypisujemy kompleks kołańcuchowy rzeczywistych przestrzeni liniowych, zaś funkcji gładkiej przekształcenie kołańcuchowe. Otrzymane w ten sposób grupy kohomologii nazywamy grupami kohomologii de Rhama rozmaitości różniczkowej.

Zdefiniujemy teraz funktor, który prowadzi z kategorii $\mathcal{T}op$ w kategorię ograniczonych z dołu kompleksów łańcuchowych grup abelowych.
Niech $\triangle^n$ będzie n– wymiarowym sympleksem o zbiorze wierzchołków $\{0, 1, \ldots, n\}$.

6.13. Definicja. *i – tą ścianą sympleksu $\triangle^n$ nazywamy przekształcenie $\delta_n^i : \triangle^{n-1} \to \triangle^n$ zadane przez $\{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, i-1, \hat{i}, i+1, \ldots, n\}$*

6.14. Stwierdzenie. *Dla $j < i$ zachodzi równość:*

$$\delta_n^i \delta_{n-1}^j = \delta_n^j \delta_{n-1}^{i-1}.$$

6.15. Definicja. *Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, to n – wymiarowym sympleksem singularnym w X nazywamy dowolne ciągłe przekształcenie $\sigma : \triangle^n \to X$.*

6.16. Definicja. *Niech $S_n(X)$, $n \geq 0$ będzie wolną grupą abelową generowaną przez n – wymiarowe sympleksy singularne w X. Niech $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ będzie zadane dla $n \geq 1$ wzorem*

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \sigma \circ \delta_n^i.$$

Przyjmujemy $S_n(X) = 0$ dla $n < 0$ i $\partial_0 : S_0(X) \to S_{-1}(X) = 0$ homomorfizm zerowy.

6.17. Stwierdzenie. *Dla każdego $n \geq 0$ zachodzi równość*

$$\partial_{n-1}\partial_n = 0.$$

Kompleks łańcuchowy $S(X)$

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \to 0$$

nazywamy **kompleksem łańcuchów singularnych** przestrzeni X. Jest jasne, że przekształcenie ciągłe definiuje odpowiednie przekształcenie łańcuchowe i mamy funktor $S : \mathcal{T}op \to \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ z kategorii przestrzeni topologicznych w kategorię kompleksów łańcuchowych grup abelowych.

6.18. Definicja. *Niech $A \subseteq X$ będzie podprzestrzenią. Kompleks ilorazowy $S(X)/S(A)$ nazywamy kompleksem singularnym pary (X, A).*

6.19. Definicja. *Grupami homologii singularnych przestrzeni X nazywamy grupy homologii $H(S(X))$ i oznaczamy symbolem $H(X)$, Grupami homologii singularnych pary przestrzeni (X, A) nazywamy grupy homologii $H(S(X)/S(A))$ i oznaczamy symbolem $H(X, A)$.*

Oczywiście grupy homologii pary $(X, \emptyset)$ utożsamiamy z grupami homologii przestrzeni X.

Niech G będzie dowolną grupą abelową. Kompleks łańcuchowy $S(X) \otimes G$ to kompleks

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes id} S_n(X) \otimes G \xrightarrow{\partial_n \otimes id} S_{n-1} \otimes G \xrightarrow{\partial_{n-1} \otimes id} \ldots \xrightarrow{\partial_1 \otimes id} S_0(X) \otimes G \to 0$$

6.20. Definicja. *Grupami homologii singularnych przestrzeni X (pary (X, A)) o współczynnikach w grupie G nazywamy grupy homologii kompleksu łańcuchowego $S(X) \otimes G$ i $S(X)/S(A) \otimes G$ odpowiednio.*

Grupy homologii singularnych choć są ewidentnie algebraicznym niezmiennikiem przestrzeni topologicznych wydają się niemożliwe do policzenia wprost z definicji. Kluczem do ich zrozumienia a także pewnych obliczeń jest obserwacja, że spełniają one zestaw aksjomatów, zwanych aksjomatami **Eilenberga Steenroda**.

Aksjomaty Eilenberga-Steenroda

6.21. Definicja(Eilenberg- Steenrod). *Niech $\mathcal{A}$ będzie pełną podkategorią kategorii par przestrzeni topologicznych, taką że:*

1) jeżeli $(X, A) \in \mathcal{A}$, to pary $(X, X), (X, \emptyset), (A, A), (A, \emptyset)$ oraz $(X \times I, A \times I)$ należą do $\mathcal{A}$

2) $(*, \emptyset) \in \mathcal{A}$

Teorią homologii H na kategorii $\mathcal{A}$ nazywamy kowariantny funktor H w kategorię grup abelowych z gradacją i homomorfizmów stopnia 0 oraz transformacji naturalnej ∂ stopnia -1 odwzorowywującej $H(X, A) \to H(A)$ (tzn. mamy $\{\}$) homotopia, dokladnosc, wycinanie $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$, $\bar{U} \subseteq \operatorname{int} A$, wymiar

Literatura:

[B-T] R.Bott, Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics 82, Springer Verlag, 1982

[B] G.Bredon, Topology and Geometry, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer Verlag, 1995.

[A-G-P] M.Aguilar,S.Gitler,C.Prieto Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint,
Universitext, Springer Verlag, 2002

[F] Fuks-Fomienko, Gomotopiczeskaja Topologia, Nauka 1989

[H] A.Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press 2002 (dostępna w sieci)

[M] P.May, A Concise Course in Algebraic Topology, Chicago Lecture Notes in Mathematics, The University of Chicago and London, 1999

[P] Postnikow

[S] E.Spanier,Topologia Algebraiczna, PWN